

Corrigé : Variations et courbes représentatives

Fiche Défi

D1.

- Pour $0 < |h| < \delta$, $a+h \in]a-\delta; a+\delta[$ donc $f(a+h) - f(a) \leq 0$. Si $0 < h < \delta$, on divise par $h > 0$: $\tau(h) \leq 0$. Si $-\delta < h < 0$, on divise par $h < 0$: $\tau(h) \geq 0$.
- Quand $h \rightarrow 0$ avec $h > 0$, $\tau(h) \leq 0$ donne à la limite $f'(a) \leq 0$. Quand $h \rightarrow 0$ avec $h < 0$, $\tau(h) \geq 0$ donne $f'(a) \geq 0$.
Conclusion : $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$, donc $f'(a) = 0$. (Le raisonnement est le même pour un minimum local, avec les signes échangés.)
- Non. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: 0 n'est pas un extremum. Il faut en plus que f' change de signe en a : de $+$ à $-$ pour un maximum local, de $-$ à $+$ pour un minimum local.
- $u'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$ et $v'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$ (dérivée de $-7 \times \frac{1}{x+2}$). Donc $(u-v)' = 0$ sur l'intervalle $] -2; +\infty[$: $u-v$ est constante. En 0 : $u(0) - v(0) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$. Calcul direct : $u(x) - v(x) = \frac{3x-1+7}{x+2} = \frac{3x+6}{x+2} = 3$.
Conclusion : $u(x) - v(x) = 3$ pour tout $x > -2$, soit $u(x) = 3 - \frac{7}{x+2}$.
- Pour tout x , $f(-x) = f(x)$. La fonction $x \mapsto f(-x)$ a pour dérivée $x \mapsto -f'(-x)$ (dérivée de $g(ax+b)$ avec $a = -1$). En dérivant l'égalité : $-f'(-x) = f'(x)$, soit $f'(-x) = -f'(x)$: f' est impaire. En $x = 0$: $f'(0) = -f'(0)$, donc $f'(0) = 0$.
Conclusion : la dérivée d'une fonction paire est impaire, et la courbe a une tangente horizontale à l'abscisse 0.

D2.

- $f'_m(x) = 3x^2 + 2mx + 3$. Discriminant : $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 4m^2 - 36 = 4(m^2 - 9) = 4(m-3)(m+3)$.
- Si $-3 \leq m \leq 3$, alors $m^2 \leq 9$ et $\Delta \leq 0$. Si $\Delta < 0$, le trinôme f'_m est du signe de son coefficient dominant $3 > 0$: $f'_m > 0$ sur $\mathbb{R}$. Si $\Delta = 0$ ($m = \pm 3$), f'_m n'a qu'une racine double : $f'_m \geq 0$, et f'_m ne s'annule qu'en un seul point.
Conclusion : f'_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour $m = 3$: $f_3(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ et $f'_3(x) = 3(x+1)^2$ s'annule en -1 mais reste positive de part et d'autre : pas d'extremum, comme annoncé en D1.
- Si $|m| > 3$, alors $\Delta > 0$: f'_m a deux racines $x_1 < x_2$ et $f'_m(x) = 3(x-x_1)(x-x_2)$ est positive sur $] -\infty; x_1[$, négative sur $]x_1; x_2[$, positive sur $]x_2; +\infty[$. Le changement de signe de $+$ à $-$ en x_1 donne un maximum local ; le changement de $-$ à $+$ en x_2 donne un minimum local.
- Pour $m = 4$: $f'_4(x) = 3x^2 + 8x + 3$, $\Delta = 64 - 36 = 28$, donc $x_{1,2} = \frac{-8 \mp 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4 \mp \sqrt{7}}{3}$. Ainsi $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \approx -2,22$ et $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3} \approx -0,45$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'_4(x)$		+	-	+
$f_4(x)$		$\nearrow \approx 3,11$	$\searrow \approx 0,37$	

On a $f_4(-4) = -64 + 64 - 12 + 1 = -11 < 0$ et $-4 < x_1$. Sur $] -\infty; x_1[$, f_4 est strictement croissante : elle reste inférieure à $f_4(-4) < 0$ pour $x \leq -4$ et passe de -11 à $3,11$ sur $[-4; x_1]$: une solution de $f_4(x) = 0$. Sur $[x_1; x_2]$, f_4 décroît de $3,11$ à $0,37$: elle reste strictement positive. Sur $[x_2; +\infty[$, f_4 croît à partir de $0,37$: elle reste strictement positive.

Conclusion : l'équation $f_4(x) = 0$ a une unique solution, dans $] -4; x_1[$.

5. Posons $t = -\frac{m}{3}$. Par développement,

$$f_m(t+h) + f_m(t-h) = 2t^3 + 6th^2 + m(2t^2 + 2h^2) + 6t + 2 = 2(t^3 + mt^2 + 3t + 1) + (6t + 2m)h^2.$$

Or $6t + 2m = -2m + 2m = 0$, donc $f_m(t+h) + f_m(t-h) = 2f_m(t)$, avec $f_m(t) = \frac{2m^3}{27} - m + 1$.

Conclusion : les points d'abscisses $t+h$ et $t-h$ de $\mathcal{C}_m$ ont pour milieu $\Omega(t; f_m(t))$: Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_m$.

D3.

1. L'aire totale vaut $2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi$. En divisant par 2π : $r^2 + rh = 3$, d'où $rh = 3 - r^2$ et, comme $r > 0$, $h = \frac{3-r^2}{r}$. La hauteur doit être strictement positive : $3 - r^2 > 0$, soit $0 < r < \sqrt{3}$. On étudie V sur $[0; \sqrt{3}]$ en prolongeant aux cas dégénérés (volume nul).
2. $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \times \frac{3-r^2}{r} = \pi r(3-r^2) = \pi(3r - r^3)$.
3. V est un polynôme, dérivable sur $[0; \sqrt{3}]$, et $V'(r) = \pi(3 - 3r^2) = 3\pi(1-r)(1+r)$. Sur $[0; \sqrt{3}]$, $1+r > 0$: $V'(r)$ est du signe de $1-r$, positive sur $[0; 1[$, négative sur $]1; \sqrt{3}]$. Images : $V(0) = 0$, $V(1) = \pi(3-1) = 2\pi$ et $V(\sqrt{3}) = \pi(3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 0$.

r	0	1	$\sqrt{3}$
$V'(r)$	+	0	-
$V(r)$	0	2π	0

4. Le volume est maximal pour $r = 1$ dm. Alors $h = \frac{3-1}{1} = 2$ dm, donc $h = 2r$: la hauteur est égale au diamètre. Le volume maximal est $V(1) = 2\pi \approx 6,3 \text{ dm}^3$, soit environ 6,3 litres.
Conclusion : la boîte de volume maximal a pour rayon 1 dm et pour hauteur 2 dm ; son volume est $2\pi \approx 6,3 \text{ L}$.
5. $V(1) - V(r) = 2\pi - 3\pi r + \pi r^3 = \pi(r^3 - 3r + 2)$. Or $(r-1)^2(r+2) = (r^2 - 2r + 1)(r+2) = r^3 - 3r + 2$. Donc $V(1) - V(r) = \pi(r-1)^2(r+2) \geq 0$ pour $r \geq 0$, avec égalité si et seulement si $r = 1$: $V(r) \leq V(1)$ pour tout $r \in [0; \sqrt{3}]$.

D4.

1. c est dérivable sur $[0; 12]$ comme quotient dont le dénominateur $t^2 + 4 \geq 4$ ne s'annule pas. Avec $u(t) = 20t$ et $v(t) = t^2 + 4$:

$$c'(t) = \frac{20(t^2 + 4) - 20t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{80 - 20t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{20(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{20(2-t)(2+t)}{(t^2 + 4)^2}.$$

Sur $[0; 12]$, $2+t > 0$ et le dénominateur est positif : c' est du signe de $2-t$. Images : $c(0) = 0$,

$$c(2) = \frac{40}{8} = 5, \quad c(12) = \frac{240}{148} = \frac{60}{37} \approx 1,62.$$

t	0	2	12
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	5	$\frac{60}{37}$

2. *Conclusion : la concentration est maximale 2 heures après la prise ; elle vaut alors 5 mg/L.*
3. Comme $t^2 + 4 > 0 : c(t) \geq 4 \iff 20t \geq 4(t^2 + 4) \iff 4t^2 - 20t + 16 \leq 0 \iff t^2 - 5t + 4 \leq 0$. Or $t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$, négatif entre les racines 1 et 4 : $c(t) \geq 4 \iff t \in [1; 4]$.
Conclusion : le médicament est efficace de 1 h à 4 h après la prise, soit pendant 3 heures.
4. $c'(0) = \frac{20 \times 4}{16} = 5$ et $c(0) = 0$: la tangente T a pour équation $y = 5t$. Ensuite

$$5t - c(t) = 5t - \frac{20t}{t^2 + 4} = \frac{5t(t^2 + 4) - 20t}{t^2 + 4} = \frac{5t^3}{t^2 + 4}.$$

Pour $t \geq 0$ cette quantité est positive, nulle seulement en $t = 0$.

Conclusion : la courbe de c est au-dessous de T sur $[0; 12]$ et touche T à l'origine.

5. $c(t) = 2 \iff 20t = 2(t^2 + 4) \iff t^2 - 10t + 4 = 0$. Le discriminant est $100 - 16 = 84 = 4 \times 21$, les racines sont $5 - \sqrt{21} \approx 0,42$ et $5 + \sqrt{21} \approx 9,58$. Seule la seconde est dans $[2; 12]$. D'ailleurs, sur $[2; 12]$, c est strictement décroissante de 5 à $\frac{60}{37} < 2$ et $2 \in \left] \frac{60}{37}; 5 \right[$: il y a bien une unique solution.
 De plus $5 + \sqrt{21} \approx 9,5826$ et $0,5826 \times 60 \approx 34,95$.
Conclusion : la concentration passe sous 2 mg/L à l'instant $t = 5 + \sqrt{21} \approx 9,58$ h, soit environ 9 h 35 min après la première prise.

6. Le programme compte les valeurs $t = \frac{k}{100}$, pour k de 0 à 1200 (donc t de 0 à 12 par pas de 0,01), pour lesquelles $c(t) \geq 4$. D'après la question 3, ce sont les $t \in [1; 4]$, c'est-à-dire $k = 100, 101, \dots, 400$: 301 valeurs. Cela correspond à 300 pas de 0,01 h, soit 3 h : la durée d'efficacité trouvée.

D5.

1. $AM^2 = (x-0)^2 + (x^2-2)^2 = x^2 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = g(x)$. Comme $AM \geq 0$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, AM est minimale si et seulement si AM^2 l'est.
2. $g(-x) = g(x)$: g est paire, donc son minimum sur $\mathbb{R}$ est son minimum sur $[0; +\infty[$. Sur cet intervalle, $g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 4x \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$. Pour $x > 0$, $x + \frac{\sqrt{6}}{2} > 0$: g' est du signe de $x - \frac{\sqrt{6}}{2}$. Images : $g(0) = 4$ et, avec $x^2 = \frac{3}{2}$, $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$.

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	4	$\frac{7}{4}$	

Le minimum de g est $\frac{7}{4}$, atteint en $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Conclusion : la distance minimale de A à $\mathcal{P}$ est $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32$, atteinte aux deux points $M\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

3. $AM^2 = x^2 + (x^2 - a)^2 = x^4 - 2ax^2 + a^2 + x^2 = x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 =: G_a(x)$, et $G'_a(x) = 4x^3 + 2(1 - 2a)x = 2x(2x^2 + 1 - 2a)$. G_a est paire : on étudie sur $[0; +\infty[$.
 Cas $a \leq \frac{1}{2}$. Pour $x > 0$, $2x^2 > 0$ et $1 - 2a \geq 0$, donc $G'_a(x) > 0$: G_a est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, de minimum $G_a(0) = a^2$.
Conclusion : la distance minimale est $|a|$, atteinte au seul point $O(0; 0)$, sommet de la parabole.

Cas $a > \frac{1}{2}$. Posons $r = \sqrt{a - \frac{1}{2}} > 0$; alors $2x^2 + 1 - 2a = 2(x - r)(x + r)$ et, pour $x > 0$, $G'_a(x)$ est du signe de $x - r$: G_a décroît sur $[0; r]$ puis croît sur $[r; +\infty[$. Son minimum est

$$G_a(r) = r^4 + (1 - 2a)r^2 + a^2 = (a - \frac{1}{2})^2 - 2(a - \frac{1}{2})^2 + a^2 = a^2 - (a - \frac{1}{2})^2 = a - \frac{1}{4}.$$

Par parité, il est aussi atteint en $-r$.

Conclusion : la distance minimale est $\sqrt{a - \frac{1}{4}}$, atteinte aux deux points $M\left(\pm\sqrt{a - \frac{1}{4}}; a - \frac{1}{4}\right)$. Pour $a = 2$, on retrouve $\frac{\sqrt{7}}{2}$ et les points $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

4. Pour $a = 1 > \frac{1}{2}$, la distance minimale est $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$, atteinte en $M\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. La distance de A au sommet O est $1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (en effet $a^2 - (a - \frac{1}{4}) = (a - \frac{1}{2})^2 > 0$).

Conclusion : non, pour $a = 1$ le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A n'est pas le sommet.

D6.

1. $g(x) = x^2 - x^3$ est dérivable sur $[0; 1]$ et $g'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$. Sur $]0; 1[$, $x > 0$: g' est du signe de $2 - 3x$, positive sur $]0; \frac{2}{3}[$, négative sur $] \frac{2}{3}; 1[$. Images : $g(0) = 0$, $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, $g(1) = 0$.

Conclusion : le maximum de g sur $[0; 1]$ est $\frac{4}{27}$, atteint seulement en $x = \frac{2}{3}$; donc $g(x) \leq \frac{4}{27}$.

2. Comme $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y = s$, $u = \frac{x}{s} \in [0; 1]$, $x = su$ et $y = s - x = s(1 - u)$. Alors $x^2y = s^2u^2 \times s(1 - u) = s^3g(u) \leq \frac{4s^3}{27}$. L'égalité a lieu si et seulement si $u = \frac{2}{3}$.

Conclusion : $x^2y \leq \frac{4s^3}{27}$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{2s}{3}$ et $y = \frac{s}{3}$.

3. Soit $s = x + y \in]0; 90]$. Le volume $V = x^2y$ vérifie $V \leq \frac{4s^3}{27} \leq \frac{4 \times 90^3}{27} = 108\,000$, car $s \leq 90$ et $s \mapsto s^3$ est croissante. L'égalité exige $s = 90$, $x = 60$ et $y = 30$, et on a bien $60^2 \times 30 = 108\,000$.

Conclusion : le volume maximal d'un colis accepté est $108\,000 \text{ cm}^3$ (108 L), pour un côté de base de 60 cm et une hauteur de 30 cm .

4. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) = \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}x + \frac{4}{27} = x^3 - x^2 + \frac{4}{27}$, qui est bien $\frac{4}{27} - x^2(1 - x)$. Pour $x \in [0; 1]$, $x + \frac{1}{3} > 0$ et le carré est positif : $\frac{4}{27} - g(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{2}{3}$.

Conclusion : on retrouve $g(x) \leq \frac{4}{27}$ sur $[0; 1]$, avec égalité seulement en $\frac{2}{3}$. L'inégalité reste vraie pour tout $x \geq -\frac{1}{3}$.

D7.

1. $f'(x) = 2x$, $f(2) = 1$ et $f'(2) = 4$. La tangente en 2 a pour équation $y = 4(x - 2) + 1 = 4x - 7$. Elle coupe l'axe des abscisses quand $4x - 7 = 0$, soit $x = \frac{7}{4}$.

Conclusion : $x_1 = \frac{7}{4} = 1,75$.

2. Soit $a > 0$. La tangente en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 - 3 + 2a(x - a)$. Elle coupe l'axe quand

$$x = a - \frac{a^2 - 3}{2a} = \frac{2a^2 - a^2 + 3}{2a} = \frac{a^2 + 3}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3}{a}\right) > 0.$$

Avec $a = x_n$, on obtient $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$. Comme $x_0 = 2 > 0$ et qu'un terme strictement

positif a un successeur strictement positif, tous les termes de la suite sont strictement positifs (et la tangente en x_n est donc toujours définie).

3. Le programme affiche :

```
1 1.75
2 1.7321428571428572
3 1.7320508100147274
4 1.7320508075688772
```

On a $\sqrt{3} \approx 1,7320508075688772$: x_4 coïncide avec $\sqrt{3}$ à la précision de l'affichage, et le nombre de décimales exactes double environ à chaque étape.

4. Pour tout n , $x_n > 0$ et

$$x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{x_n^2 + 3 - 2\sqrt{3}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{3})^2}{2x_n} \geq 0.$$

Donc $x_{n+1} \geq \sqrt{3}$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $x_n \geq \sqrt{3}$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} - x_n = \frac{3 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$ car $x_n^2 \geq 3$ et $x_n > 0$.

Conclusion : la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.

5. $e_1 = \frac{7}{4} - \sqrt{3} < 1,75 - 1,73 = 0,02$. Pour $n \geq 1$, $e_n \geq 0$ et $x_n \geq \sqrt{3} > 1,73$, donc $2x_n > 3,46$ et $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n} \leq \frac{e_n^2}{3,46}$. Alors

$$e_2 < \frac{0,02^2}{3,46} < 1,2 \times 10^{-4}, \quad e_3 < \frac{(1,2 \times 10^{-4})^2}{3,46} < 4,2 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

Conclusion : $0 \leq x_3 - \sqrt{3} < 10^{-8}$: $x_3 \approx 1,73205081$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-8} près.