

Variations et courbes représentatives

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Du signe de f' aux variations

Une fonction f est dérivable sur $[-5; 3]$. On donne le signe de f' et quelques valeurs de f .

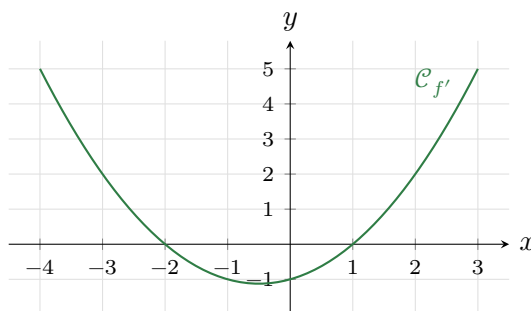
x	-5	-1	3
$f'(x)$	-	0	+

$$f(-5) = 6, f(-1) = -2, f(3) = 4.$$

1. Dresser le tableau de variations de f (avec les images).
2. Donner le minimum local de f , puis le minimum et le maximum de f sur $[-5; 3]$.
3. Comparer, sans calculer, $f(-4)$ et $f(-2)$, puis $f(0)$ et $f(2)$. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(1)$?
4. La fonction f est-elle positive sur $[-5; 3]$? Justifier.

Exercice B2 : Lire la courbe de la dérivée

On donne la courbe de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-4; 3]$.



1. Lire les solutions de $f'(x) = 0$ et donner le signe de $f'(x)$ selon x .
2. Dresser le tableau de variations de f (sans valeurs numériques pour f).
3. En quelles abscisses f admet-elle un extremum local? De quelle nature?
4. Lire $f'(0)$. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0?

Exercice B3 : Variations d'un trinôme

Étudier les variations de chaque fonction sur $\mathbb{R}$ (dérivée, signe, tableau) et donner son extremum.

1. $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$;
2. $g(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

Exercice B4 : Un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Donner les extremums locaux de f , puis le maximum et le minimum de f sur $[-3; 3]$.
4. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[-3; 3]$? Justifier.

Exercice B5 : Variations de quotients

Étudier les variations de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$;
2. $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$ (montrer que $g'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$).

Exercice B6 : Combien de solutions ?

Le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $[-4; 5]$ est le suivant.

x	-4	-1	2	5
$f(x)$	-3	2	-2	4

Pour chaque valeur de k , donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ dans $[-4; 5]$:

$$k = 0 ; \quad k = 2 ; \quad k = -2 ; \quad k = 3 ; \quad k = 5.$$

Exercice B7 : Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

1. La fonction $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f'(3) = 0$, alors f admet un extremum local en 3.
3. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
4. La fonction $g(x) = x^2 - 4x + 7$ admet un minimum égal à 3.

Exercice B8 : Position relative de deux courbes

Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et donner leurs points communs.

1. $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 3x$;
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

Exercice B9 : Un enclos d'aire maximale

Un enclos rectangulaire a un périmètre de 40 m. On note x sa largeur, en mètres.

1. Exprimer sa longueur en fonction de x , puis préciser l'intervalle de valeurs de x (on étudiera ensuite A sur l'intervalle fermé correspondant).
2. Montrer que l'aire est $A(x) = x(20 - x)$, puis étudier les variations de A .
3. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ? Quelle est cette aire ?

Exercice B10 : Balayage en Python

On considère le programme suivant.

```
def f(x):
    return x ** 2 - 6 * x + 10

mini = f(0)
xmin = 0
for k in range(1, 13):
    x = k / 2
    if f(x) < mini:
        mini = f(x)
        xmin = x
print(xmin, mini)
```

1. Quelles valeurs de x le programme teste-t-il ? Que cherche-t-il ?
2. Calculer à la main ce que le programme affiche.
3. Retrouver ce résultat par l'étude des variations de f sur $[0; 6]$.
4. Qu'affiche le programme si l'on remplace $<$ par $>$? Interpréter.

Exercice B11 : Fonctions paires et impaires

1. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur un ensemble symétrique par rapport à 0, calculer $f(-x)$ et dire si la fonction est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre :
 - a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
 - b) $g(x) = x^3 - 4x$ sur $\mathbb{R}$;
 - c) $h(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$;
 - d) $k(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Traduire géométriquement la parité de f et l'imparité de g pour leurs courbes représentatives.
3. Une fonction paire φ vérifie $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi(3) = 0$. Donner $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$ et $\varphi(-3)$. Même question pour une fonction impaire ψ vérifiant les mêmes valeurs en 1, 2, 3.
4. On suppose que φ et ψ sont croissantes sur $[0; 3]$. Quel est le sens de variation de chacune sur $[-3; 0]$? Justifier avec la symétrie de la courbe.
5. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour les fonctions de la question 1. Que remarque-t-on sur la parité de f' et de g' ?