

Corrigé : Variations et courbes représentatives**Fiche Bases****B1.**

1. $f' < 0$ sur $[-5; -1[$ donc f décroît ; $f' > 0$ sur $] -1; 3]$ donc f croît.

x	-5	-1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	6	-2	4

2. f' s'annule en -1 en passant de $-$ à $+$: $f(-1) = -2$ est un minimum local. Il est aussi le minimum de f sur $[-5; 3]$ (valeurs aux bornes 6 et 4, supérieures à -2). Le maximum de f sur $[-5; 3]$ est le plus grand des deux nombres $f(-5) = 6$ et $f(3) = 4$.

Conclusion : le minimum est -2 (en $x = -1$), le maximum est 6 (en $x = -5$).

3. f est décroissante sur $[-5; -1]$ et $-4 < -2$, donc $f(-4) > f(-2)$. f est croissante sur $[-1; 3]$ et $0 < 2$, donc $f(0) < f(2)$. Les réels -3 et 1 ne sont pas dans un même intervalle de monotonie (f décroît en -3 et croît en 1) : on ne peut pas comparer $f(-3)$ et $f(1)$ avec ces seules informations.
4. Non : $f(-1) = -2 < 0$. Le signe de f' renseigne sur les variations, pas sur le signe de f .

B2.

1. La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en -2 et en 1 : $f'(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 1$. La courbe est au-dessus de l'axe sur $[-4; -2[$ et sur $]1; 3]$, au-dessous sur $] -2; 1[$: $f' > 0$ sur $[-4; -2[\cup]1; 3]$ et $f' < 0$ sur $] -2; 1[$.

x	-4	-2	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(-4)$	$f(-2)$	$f(1)$	$f(3)$	

2.

3. f' s'annule en changeant de signe en -2 (de $+$ à $-$) et en 1 (de $-$ à $+$).

Conclusion : f admet un maximum local en $x = -2$ et un minimum local en $x = 1$.

4. On lit $f'(0) = -1$. La tangente en $x = 0$ a pour pente -1 : elle descend, ce qui est cohérent avec la décroissance de f sur $] -2; 1[$.

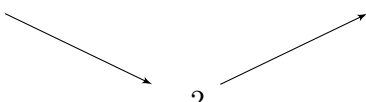
B3.

1. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = -4x + 8 = -4(x - 2)$. Donc $f'(x) > 0 \iff x < 2$. Comme $f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		5	

Conclusion : f est strictement croissante sur $] -\infty; 2]$, strictement décroissante sur $[2; +\infty[$; son maximum est 5, atteint en $x = 2$.

2. $g'(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$, négative pour $x < -1$, positive pour $x > -1$. Comme $g(-1) = 3 - 6 + 1 = -2$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$, strictement croissante sur $[-1; +\infty[$; son minimum est -2 , atteint en $x = -1$.

B4.

- f est un polynôme, dérivable sur $[-3; 3]$. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$, car -1 et 2 sont racines de $x^2 - x - 2$ (somme 1 , produit -2).
- Le trinôme a pour coefficient $a = 6 > 0$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Images : $f(-3) = -54 - 27 + 36 + 1 = -44$, $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$, $f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$, $f(3) = 54 - 27 - 36 + 1 = -8$.

x	-3	-1	2	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-44	8	-19	-8	

- Maximum local $f(-1) = 8$, minimum local $f(2) = -19$. Les valeurs aux bornes, -44 et -8 , sont à comparer : le minimum de f sur $[-3; 3]$ est $f(-3) = -44$; son maximum est $f(-1) = 8$.

Conclusion : maximum 8 (en $x = -1$), minimum -44 (en $x = -3$, à la borne).

- On utilise la propriété admise en Première : si f est dérivable (donc continue) et strictement monotone sur $[a; b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte exactement une fois. Sur $[-3; -1]$, f croît strictement de -44 à 8 : la valeur 0 est atteinte une fois. Sur $[-1; 2]$, f décroît strictement de 8 à -19 : une fois. Sur $[2; 3]$, f croît de -19 à -8 : elle reste strictement négative.

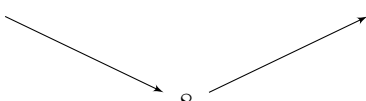
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a exactement 2 solutions dans $[-3; 3]$.

B5.

- $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 1$, $v(x) = x + 2$. $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$ sur $]-2; +\infty[$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

- $u(x) = x^2$, $v(x) = x - 2$: $g'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Sur $]2; +\infty[$, $x > 0$ et $(x-2)^2 > 0$: $g'(x)$ est du signe de $x - 4$. Et $g(4) = \frac{16}{2} = 8$.

x	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]2; 4]$, strictement croissante sur $[4; +\infty[$; son minimum est 8, atteint en $x = 4$.

B6. Sur chaque intervalle de monotonie, on regarde si k est compris entre les images des bornes. Les intervalles sont $[-4; -1]$ (de -3 à 2), $[-1; 2]$ (de 2 à -2), $[2; 5]$ (de -2 à 4).

- $k = 0$: compris dans les trois intervalles, strictement entre les images : 3 solutions.
- $k = 2$: atteint en $x = -1$ (maximum local) ; sur $[2; 5]$, $2 \in]-2; 4[$ donne une solution ; sur $[-4; -1]$ et $[-1; 2]$, 2 n'est atteint qu'en $x = -1$. Au total : 2 solutions.
- $k = -2$: atteint en $x = 2$ (minimum local) ; sur $[-4; -1]$, $-2 \in]-3; 2[$ donne une solution ; sur $[2; 5]$ il n'est atteint qu'en 2 . Au total : 2 solutions.
- $k = 3$: seul $[2; 5]$ (de -2 à 4) convient ; ailleurs $f \leq 2$. Au total : 1 solution.
- $k = 5$: $5 > 4$, le maximum de f : aucune solution.

B7.

- Vrai.** $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x+2)^2 \geq 0$, nulle seulement en $x = -2$ (point isolé) : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2 - 18x + 27 = 3(x-3)^2$. Alors $f'(3) = 0$, mais $f' \geq 0$ de part et d'autre de 3 : f est strictement croissante, sans extremum en 3 . Il faut un changement de signe de f' .
- Faux.** $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$: on a $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$, ce qui contredit la décroissance sur $\mathbb{R}^*$. La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ séparément, pas sur $\mathbb{R}^*$.
- Vrai.** $g'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$: g décroît puis croît, avec un minimum $g(2) = 4 - 8 + 7 = 3$.

B8.

- $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, trinôme de coefficient $a = 1 > 0$ et de racines 1 et 2 : positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.
Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[$, au-dessous sur $]1; 2[$; les courbes se coupent en $(1; 3)$ et $(2; 6)$.
- $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$. Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$ et le signe est celui de $1-x$: positif si $x < 1$, négatif si $x > 1$.
Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; 0[\cup]0; 1[$, au-dessous sur $]1; +\infty[$; les courbes ont deux points communs, $(0; 0)$ et $(1; 1)$. En $(0; 0)$ la différence ne change pas de signe : les courbes se touchent sans se traverser.

B9.

- Le demi-périmètre vaut 20 : la longueur est $20 - x$. Il faut $x > 0$ et $20 - x > 0$: $x \in]0; 20[$. Pour l'étude, on prolonge à $[0; 20]$ (cas dégénérés d'aire nulle).
- $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, polynôme dérivable, $A'(x) = 20 - 2x = 2(10 - x)$, positive pour $x < 10$. $A(10) = 100$; $A(0) = A(20) = 0$.

x	0	10	20
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$	0	100	0

- Conclusion : l'aire est maximale pour $x = 10$ m ; l'enclos est alors un carré de 10 m de côté, d'aire 100 m^2 .**

B10.

1. Le programme part de $x = 0$ puis teste $x = 0,5; 1; 1,5; \dots; 6$ (pas de 0,5). Il cherche la plus petite valeur de f parmi ces nombres et la valeur de x correspondante.
2. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$. Les valeurs sont $f(0) = 10$, $f(0,5) = 7,25$, $f(1) = 5$, $f(1,5) = 3,25$, $f(2) = 2$, $f(2,5) = 1,25$, $f(3) = 1$, puis $f(3,5) = 1,25$ et les valeurs suivantes sont supérieures à 1. La variable **mini** est mise à jour jusqu'en $x = 3$, puis plus jamais : le programme affiche **3.0 1.0**.
3. $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$: f décroît sur $[0; 3]$ et croît sur $[3; 6]$. Son minimum est $f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$, atteint en $x = 3$: c'est le résultat du programme.
4. $f(0) = f(6) = 10$ et $f(x) < 10$ pour $0 < x < 6$. Avec **>**, le programme cherche le maximum : la condition $f(x) > 10$ n'est jamais vraie (même en $x = 6$, où $f(6) = 10$ n'est pas strictement supérieur), donc **mini** et **xmin** gardent leurs valeurs initiales et le programme affiche **0 10**.
Conclusion : 10 est bien le maximum de f sur $[0; 6]$, atteint en 0 et en 6 ; l'inégalité stricte ne retient que la première valeur rencontrée, $x = 0$.

B11.

1. a) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$: f est **paire**.
 b) $g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -g(x)$: g est **impaire**.
 c) $h(-x) = x^2 - x$. Or $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$: $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$. h n'est **ni paire ni impaire** (le contre-exemple $x = 1$ suffit).
 d) $k(-x) = \frac{1}{-x} = -k(x)$: k est **impaire**.
2. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. Fonction paire : $\varphi(-1) = \varphi(1) = 2$, $\varphi(-2) = -1$, $\varphi(-3) = 0$. Fonction impaire : $\psi(-x) = -\psi(x)$, donc $\psi(-1) = -2$, $\psi(-2) = 1$, $\psi(-3) = 0$.
4. Pour φ paire : la symétrie d'axe (Oy) échange les parties de la courbe sur $[0; 3]$ et sur $[-3; 0]$ en inversant le sens de parcours : une courbe qui monte sur $[0; 3]$ descend sur $[-3; 0]$ quand on va de gauche à droite. φ est **décroissante** sur $[-3; 0]$. Pour ψ impaire : la symétrie centrale de centre O conserve le sens de variation : ψ est **croissante** sur $[-3; 0]$.
5. $f'(x) = 4x^3 - 6x$ et $g'(x) = 3x^2 - 4$. On a $f'(-x) = -4x^3 + 6x = -f'(x)$: f' est impaire (alors que f est paire). On a $g'(-x) = 3x^2 - 4 = g'(x)$: g' est paire (alors que g est impaire).