

Fiche 3 : études de fonctions complètes

Neuf exercices pour mener une étude de fonction complète :

- un polynôme de degré **3** : tableau, factorisation, tangente, lecture du nombre de solutions de $f(x) = k$;
- un quotient : variations, minimum, **position** par rapport à une droite ;
- des **paramètres** déterminés par une tangente ou un extremum ;
- une fonction rationnelle : variations, tangente, équation $f(x) = 2$;
- le **signe** d'un polynôme de degré **3** ;
- une **inégalité** démontrée par les variations ;
- position relative de deux courbes et première approche de la méthode de **Newton** ;
- l'étude d'une fonction **paire** ;
- la méthode de **Newton** en Python, cas favorable et cas défavorable.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le **domaine** et la dérivabilité sont justifiés ;
- la dérivée est **factorisée** et son signe **justifié** ;
- le tableau contient les **images** ;
- chaque question se termine par une **conclusion**.

Le plan d'une étude de fonction

1. **Domaine** et dérivabilité.
2. **Dérivée** factorisée.
3. **Signe** de la dérivée.
4. **Tableau** de variations avec les images.
5. **Exploitation** : extremums, tangente, position, solutions de $f(x) = k$.

« Pour la position de $\mathcal{C}_f$ et d'une droite d , j'étudie le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$, que je **factorise**. »

Les pièges classiques

- Compter les solutions de $f(x) = k$ **sans regarder chaque intervalle** du tableau.
- Étudier la position en comparant seulement **quelques points** : il faut le signe de la différence pour **tout** x .
- Oublier un point de tangence : la courbe peut **toucher** une droite sans la traverser.
- Donner l'équation d'une tangente sans le terme $+f(a)$.

Compter les solutions sans le tableau, c'est compter les marches d'un escalier sans regarder s'il monte ou descend.

Exercice 1 (★★) : un polynôme et ses solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur $[-1; 4]$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Vérifier que $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ et résoudre $f(x) = 0$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
4. Combien l'équation $f(x) = 4$ a-t-elle de solutions ? Les déterminer.

Exercice 2 (★★) : un quotient et sa position

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Quel est le minimum de f ? Résoudre $f(x) = 0$.
3. Montrer que $f(x) - 1 = \frac{-5}{x^2 + 1}$ et en déduire la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = 1$.

Exercice 3 (★★★) : retrouver des paramètres

On cherche les réels a et b tels que la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admette, en $x = 2$, un minimum local égal à -4 .

1. Écrire deux équations vérifiées par a et b , puis déterminer a et b .
2. Avec ces valeurs, dresser le tableau de variations de f sur $[-1; 3]$ et vérifier qu'il y a bien un minimum local en 2.
3. Combien l'équation $f(x) = -4$ a-t-elle de solutions dans $[-1; 3]$? Les déterminer.

Exercice 4 (★★★) : une fonction rationnelle

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 5 (★★★) : le signe d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ sur $[0; 5]$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Vérifier que $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 1)$ et résoudre $f(x) = 0$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; 5]$ et résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 6 (★★) : une inégalité

Soit $g(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[0; +\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$, la factoriser et dresser le tableau de variations de g .
2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x^3 \geq 3x - 2$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 7 (★★) : position relative et Newton

Soient $f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = 2x - 1$.

1. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
2. Appliquer la méthode de Newton à $h(x) = x^2 - 5$ avec $x_0 = 3$: calculer x_1 et x_2 .
3. Donner une valeur approchée de $\sqrt{5}$ au millième.

Exercice 8 (★★★) : une fonction paire

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$ sur $[-3; 3]$.

1. Montrer que f est paire. Que peut-on dire de $\mathcal{C}_f$?
2. Calculer $f'(x)$, la factoriser, et dresser le tableau de variations de f sur $[0; 3]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$ et les extremums de f .
4. Montrer que $f(x) + 1 = (x^2 - 1)^2$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $d : y = -1$.
5. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 9 (★★★) : la méthode de Newton avec Python

1. Soit $f(x) = x^2 - 3$ sur $]0; +\infty[$. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a > 0$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{a^2 + 3}{2a}$.
2. On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n}$. Calculer x_1 et x_2 (fractions, puis valeurs approchées).
3. Écrire une fonction Python `newton(f, df, x0, n)` qui renvoie la liste $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, puis une fonction `newton_seuil(f, df, x0, eps)` qui s'arrête dès que $|f(x)| \leq \varepsilon$ et renvoie x et le nombre d'étapes.
4. Pour $g(x) = x^3 - 2x + 2$ et $x_0 = 0$, calculer x_1, x_2, x_3 . Commenter.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Une **étude complète** avec tableau, tangente et lecture du tableau (exercices 1 et 4).
- La **position** d'une courbe par rapport à une droite ou à une autre courbe, par le signe d'une différence factorisée (exercices 2, 4 et 7).
- Des **paramètres** déterminés par une condition sur un extremum (exercice 3).
- Le **signe** d'un polynôme de degré 3 (exercice 5) et une **inégalité** par les variations (exercice 6).
- Une fonction **paire** : étude sur $[0; +\infty[$ puis symétrie (exercice 8).
- La **méthode de Newton**, à la main et avec Python (exercices 7 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur $[-1; 4]$ a pour tableau $0 \nearrow 4 \searrow 0 \nearrow 20$. Le maximum de f sur $[-1; 4]$ est :
 - A. 4
 - B. 20
 - C. 0
 - D. -1
2. Pour démontrer que $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$, on peut :
 - A. calculer $f(1)$ seulement
 - B. montrer que le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est au moins 2
 - C. montrer que $f'(x) > 0$
 - D. calculer $f(0)$
3. Si $f(x) - g(x) < 0$ pour tout x de I , alors sur I :
 - A. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$
 - B. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$
 - C. les courbes se coupent
 - D. f est décroissante
4. Pour $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$, la tangente en 0 a pour équation :
 - A. $y = 1$
 - B. $y = x$
 - C. $y = 0$
 - D. $y = x + 1$
5. Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(2) = 3$. Alors $f(-2)$ vaut :
 - A. 3
 - B. -3

C. 0

D. -2