

Fiche 2 : extremums et optimisation

Huit exercices pour maîtriser les extremums et l'optimisation :

- extremums d'un polynôme sur un **intervalle fermé** ;
- déterminer des **paramètres** à partir d'un extremum ;
- coût moyen minimal ;
- boîte de volume maximal ;
- démontrer une **inégalité** avec les variations ;
- vrai/faux ;
- variations et extremum d'un **trinôme** selon le signe de a ;
- un enclos adossé à un mur.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable** et son **domaine** sont précisés ;
- la grandeur à optimiser est **exprimée** en fonction de la variable ;
- les **bornes** sont comparées aux extremums locaux ;
- la conclusion donne la **valeur de x** , la **valeur de la grandeur** et l'**unité**.

Le modèle de rédaction d'un problème d'optimisation

« Soit x la longueur du côté découpé, en cm.

Les longueurs sont strictement positives : $x \in]0 ; 7,5[$. La formule de V garde un sens aux bornes (boîte plate), on l'étudie donc sur $[0 ; 7,5]$.

Le volume est $V(x) = \dots$ V est dérivable sur $[0 ; 7,5]$ et $V'(x) = \dots$

Le signe de V' donne le tableau de variations.

Le volume est maximal pour $x = 3$: il vaut 486 cm^3 . »

- **Nomme** la variable et **justifie le domaine**.
- **Écris** la formule de la grandeur à optimiser.
- **Conclus** en contexte, avec l'unité.

Les pièges classiques

- Oublier de préciser le **domaine** de la variable.
- Garder une solution **hors du domaine** (par exemple $x = 10$ alors que $x < 7,5$).
- Donner la valeur de x sans la **valeur de la grandeur** optimisée (ou l'inverse).
- Oublier de comparer avec les **bornes** de l'intervalle.

Trouver le x optimal sans dire à quoi il sert, c'est gagner la course et oublier de monter sur le podium.

Exercice 1 (★) : extremums sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3; 3]$.

Exercice 2 (★★) : retrouver des paramètres

On cherche les réels a et b tels que la fonction $f(x) = ax^3 + bx$ admette, au point d'abscisse 1, un extremum local égal à -2 .

1. Exprimer les deux conditions sous forme d'équations d'inconnues a et b .
2. Déterminer a et b .
3. Avec ces valeurs, vérifier que $f(1) = -2$ est bien un minimum local, et donner l'autre extremum local.

Exercice 3 (★★) : coût moyen minimal

Le coût de fabrication de q objets ($q > 0$) est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$, en euros. Le **coût moyen** est $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

1. Montrer que $M(q) = 0,5q + 10 + \frac{200}{q}$.
2. Calculer $M'(q)$ et montrer que $M'(q) = \frac{(q-20)(q+20)}{2q^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de M sur $]0; +\infty[$.
4. Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

Exercice 4 (★★) : une boîte de volume maximal

On dispose d'une feuille rectangulaire de 24 cm sur 15 cm. On découpe un carré de côté x (en cm) dans chaque coin, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Déterminer l'intervalle de valeurs possibles pour x .
2. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte, puis montrer que $V'(x) = 12(x - 3)(x - 10)$.
3. Dresser le tableau de variations de V .
4. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Donner alors les dimensions de la boîte et son volume.

Exercice 5 (★★★) : une inégalité par les variations

Soit $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{9}{x} \geq 6$.
4. L'équation $x + \frac{9}{x} = 5$ a-t-elle des solutions ?
5. Résoudre l'équation $x + \frac{9}{x} = 10$.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Le minimum d'une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ est toujours atteint en un point où f' s'annule.
2. Si f' s'annule en a en passant de $-$ à $+$, alors f admet un minimum local en a .
3. Un maximum local de f est toujours le maximum de f sur l'intervalle d'étude.
4. La fonction $f(x) = x^3$ admet un extremum local en 0.

Exercice 7 (★★) : un trinôme : variations et extremum

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f et donner son extremum. Vérifier avec la forme canonique.
2. Même question pour $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
3. Un trinôme p vérifie $p'(x) = -4x + 10$ et $p(0) = -1$. Déterminer $p(x)$. La parabole est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ? Donner son sommet.

Exercice 8 (★★★★) : un enclos adossé à un mur

Un agriculteur dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire dont un côté est un mur déjà existant (ce côté n'a pas besoin de grillage). On note x la longueur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprimer le côté parallèle au mur en fonction de x , puis donner l'ensemble des valeurs possibles de x .
2. Montrer que l'aire de l'enclos est $A(x) = -2x^2 + 60x$.
3. Étudier les variations de A et en déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale.
4. Retrouver ce résultat avec la forme canonique de A .

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Extremums** d'un polynôme sur un intervalle fermé, en comparant les bornes (exercice 1).
- **Déterminer des paramètres** grâce à un extremum (exercice 2).
- Un **problème d'optimisation** complet, avec domaine, expression, variations et conclusion (exercices 3, 4 et 8).
- Les variations et l'extremum d'un **trinôme** selon le signe de a (exercice 7).
- Une **inégalité** démontrée par les variations (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le maximum de $f(x) = x^3 - 12x$ sur $[-3; 3]$ est :
 - A. 9
 - B. 16
 - C. -16
 - D. 2
2. Pour résoudre un problème d'optimisation, la première étape est :

- A. dériver tout de suite
- B. choisir la variable et préciser son domaine
- C. calculer le maximum
- D. écrire la conclusion

3. Le minimum de $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$ vaut :

- A. 2
- B. 4
- C. 0
- D. 5

4. Le volume $V(x) = x(30 - 2x)^2$ sur $[0; 15]$ est maximal pour :

- A. $x = 15$
- B. $x = 0$
- C. $x = 10$
- D. $x = 5$

5. Si f' passe de $+$ à $-$ en a , alors f admet en a :

- A. un minimum local
- B. un maximum local
- C. aucun extremum
- D. une tangente verticale