

Fiche 2 : extremums et optimisation

Huit exercices pour maîtriser les extremums et l'optimisation :

- extremums d'un polynôme sur un **intervalle fermé** ;
- déterminer des **paramètres** à partir d'un extremum ;
- coût moyen minimal ;
- boîte de volume maximal ;
- démontrer une **inégalité** avec les variations ;
- vrai/faux ;
- variations et extremum d'un **trinôme** selon le signe de a ;
- un enclos adossé à un mur.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable** et son **domaine** sont précisés ;
- la grandeur à optimiser est **exprimée** en fonction de la variable ;
- les **bornes** sont comparées aux extremums locaux ;
- la conclusion donne la **valeur de x** , la **valeur de la grandeur** et l'**unité**.

Le modèle de rédaction d'un problème d'optimisation

« Soit x la longueur du côté découpé, en cm.

Les longueurs sont strictement positives : $x \in]0 ; 7,5[$. La formule de V garde un sens aux bornes (boîte plate), on l'étudie donc sur $[0 ; 7,5]$.

Le volume est $V(x) = \dots$ V est dérivable sur $[0 ; 7,5]$ et $V'(x) = \dots$

Le signe de V' donne le tableau de variations.

Le volume est maximal pour $x = 3$: il vaut 486 cm^3 . »

- **Nomme** la variable et **justifie le domaine**.
- **Écris** la formule de la grandeur à optimiser.
- **Conclus** en contexte, avec l'unité.

Les pièges classiques

- Oublier de préciser le **domaine** de la variable.
- Garder une solution **hors du domaine** (par exemple $x = 10$ alors que $x < 7,5$).
- Donner la valeur de x sans la **valeur de la grandeur** optimisée (ou l'inverse).
- Oublier de comparer avec les **bornes** de l'intervalle.

Trouver le x optimal sans dire à quoi il sert, c'est gagner la course et oublier de monter sur le podium.

Exercice 1 (★) : extremums sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3; 3]$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4).$$

$$f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$$

Question 2

Le trinôme $x^2 - 4$ est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 2 , négatif entre elles.

$$f(-3) = -27 + 36 = 9, f(-2) = -8 + 24 = 16, f(2) = 8 - 24 = -16, f(3) = 27 - 36 = -9.$$

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	9	↗	16	↘	−16	↗	−9

f est croissante sur $[-3; -2]$, décroissante sur $[-2; 2]$, croissante sur $[2; 3]$.

Question 3

Les valeurs aux bornes sont $f(-3) = 9$ et $f(3) = -9$, comprises entre -16 et 16 .

Le maximum de f sur $[-3; 3]$ est 16 (en $x = -2$) et son minimum est -16 (en $x = 2$).

Exercice 2 (★★) : retrouver des paramètres

On cherche les réels a et b tels que la fonction $f(x) = ax^3 + bx$ admette, au point d'abscisse 1, un extremum local égal à -2 .

1. Exprimer les deux conditions sous forme d'équations d'inconnues a et b .
2. Déterminer a et b .
3. Avec ces valeurs, vérifier que $f(1) = -2$ est bien un minimum local, et donner l'autre extremum local.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$f'(x) = 3ax^2 + b$. Un extremum local en 1 impose $f'(1) = 0$, soit $3a + b = 0$.

De plus $f(1) = -2$, soit $a + b = -2$.

$$3a + b = 0 \text{ et } a + b = -2$$

Question 2

On soustrait les deux équations : $(3a + b) - (a + b) = 0 - (-2)$, donc $2a = 2$ et $a = 1$. Puis $b = -2 - a = -3$.

$a = 1$ et $b = -3$, soit $f(x) = x^3 - 3x$.

Question 3

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$: f' est négative entre -1 et 1 , positive à l'extérieur.

En $x = 1$, f' passe de $-$ à $+$: f descend, puis monte.

$f(1) = -2$ est un **minimum local**.

En $x = -1$, f' passe de $+$ à $-$ et $f(-1) = -1 + 3 = 2$.

L'autre extremum local est le maximum local $f(-1) = 2$.

Exercice 3 (★★) : coût moyen minimal

Le coût de fabrication de q objets ($q > 0$) est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$, en euros. Le **coût moyen** est $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

1. Montrer que $M(q) = 0,5q + 10 + \frac{200}{q}$.
2. Calculer $M'(q)$ et montrer que $M'(q) = \frac{(q-20)(q+20)}{2q^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de M sur $]0; +\infty[$.
4. Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$M(q) = \frac{0,5q^2 + 10q + 200}{q} : \text{on divise chaque terme par } q.$$

$$M(q) = 0,5q + 10 + \frac{200}{q}$$

Question 2

$$M'(q) = 0,5 + 200 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right) = 0,5 - \frac{200}{q^2}.$$

$$\text{On met au même dénominateur : } M'(q) = \frac{0,5q^2 - 200}{q^2} = \frac{q^2 - 400}{2q^2}.$$

$$M'(q) = \frac{(q-20)(q+20)}{2q^2}$$

Question 3

Pour $q > 0$, $2q^2 > 0$ et $q + 20 > 0$: $M'(q)$ est du signe de $q - 20$.

$$M(20) = 0,5 \times 20 + 10 + \frac{200}{20} = 10 + 10 + 10 = 30.$$

x	0		20		$+\infty$
$M'(q)$		-	0	+	
$M(q)$		$\searrow$	30	$\nearrow$	

M est strictement décroissante sur $]0; 20]$ et strictement croissante sur $[20; +\infty[$.

Question 4

Le coût moyen est minimal pour $q = 20$ objets : il vaut alors 30 € par objet.

Remarque : on retrouve $C'(20) = 30$: au minimum du coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen.

Exercice 4 (★★) : une boîte de volume maximal

On dispose d'une feuille rectangulaire de 24 cm sur 15 cm. On découpe un carré de côté x (en cm) dans chaque coin, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Déterminer l'intervalle de valeurs possibles pour x .
2. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte, puis montrer que $V'(x) = 12(x - 3)(x - 10)$.
3. Dresser le tableau de variations de V .
4. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Donner alors les dimensions de la boîte et son volume.

Correction de l'exercice 4

Question 1

La boîte a pour base un rectangle de côtés $24 - 2x$ et $15 - 2x$, et pour hauteur x . Il faut $x > 0$, $24 - 2x > 0$ et $15 - 2x > 0$.

$x \in]0; 7,5[$ (on étudie la formule de V sur $[0; 7,5]$: aux bornes, la boîte est plate et $V = 0$)

Question 2

$$V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x) = x(360 - 78x + 4x^2).$$

$$V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$$

$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 12(x^2 - 13x + 30)$. Le trinôme $x^2 - 13x + 30$ a pour racines 3 et 10 (car $3 + 10 = 13$ et $3 \times 10 = 30$).

$$V'(x) = 12(x - 3)(x - 10)$$

Question 3

Sur $[0; 7,5]$, $x - 10 < 0$. Donc $V'(x)$ est du signe contraire de $x - 3$: positive pour $x < 3$, négative pour $x > 3$.

$$V(0) = 0, V(3) = 3 \times 18 \times 9 = 486 \text{ et } V(7,5) = 7,5 \times 9 \times 0 = 0.$$

x	0		3		7,5
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$	0	↗	486	↘	0

V est strictement croissante sur $[0; 3]$ et strictement décroissante sur $[3; 7,5]$.

Question 4

Le volume est maximal pour $x = 3$ cm.

La boîte mesure alors $24 - 6 = 18$ cm sur $15 - 6 = 9$ cm, avec une hauteur de 3 cm.

Son volume maximal est 486 cm^3 .

Exercice 5 (★★★) : une inégalité par les variations

Soit $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{9}{x} \geq 6$.
4. L'équation $x + \frac{9}{x} = 5$ a-t-elle des solutions ?
5. Résoudre l'équation $x + \frac{9}{x} = 10$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

Question 2

Pour $x > 0$, $x^2 > 0$ et $x + 3 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x - 3$. De plus $f(3) = 3 + 3 = 6$.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	

f est strictement décroissante sur $]0; 3]$ et strictement croissante sur $[3; +\infty[$.

Question 3

D'après le tableau, f est décroissante jusqu'en 3, puis croissante : son minimum sur $]0; +\infty[$ est $f(3) = 6$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 6$, c'est-à-dire $x + \frac{9}{x} \geq 6$.

Question 4

Comme $f(x) \geq 6 > 5$ pour tout $x > 0$, la valeur 5 n'est jamais atteinte.

L'équation $x + \frac{9}{x} = 5$ n'a aucune solution.

Question 5

Pour $x > 0$: $x + \frac{9}{x} = 10 \iff x^2 + 9 = 10x \iff x^2 - 10x + 9 = 0$.

Le discriminant vaut $100 - 36 = 64$, donc $x = \frac{10 - 8}{2} = 1$ ou $x = \frac{10 + 8}{2} = 9$. Les deux sont strictement positives.

$$S = \{1; 9\}$$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Le minimum d'une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ est toujours atteint en un point où f' s'annule.
2. Si f' s'annule en a en passant de $-$ à $+$, alors f admet un minimum local en a .
3. Un maximum local de f est toujours le maximum de f sur l'intervalle d'étude.
4. La fonction $f(x) = x^3$ admet un extremum local en 0.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[0; 1]$ a pour minimum 0, atteint à la borne 0, alors que $f'(x) = 1 \neq 0$.

Faux.

Affirmation 2

f descend, puis monte : c'est la définition d'un minimum local.

Vrai.

Affirmation 3

Contre-exemple : $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 3]$. $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ passe de $+$ à $-$ en -1 , donc $f(-1) = 2$ est un maximum local. Pourtant $f(3) = 27 - 9 = 18 > 2$: le maximum de f sur $[-2; 3]$ est atteint à la borne.

Faux.

Affirmation 4

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ne change pas de signe en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum.

Faux.

Exercice 7 (★★) : un trinôme : variations et extremum

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f et donner son extremum. Vérifier avec la forme canonique.
2. Même question pour $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
3. Un trinôme p vérifie $p'(x) = -4x + 10$ et $p(0) = -1$. Déterminer $p(x)$. La parabole est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ? Donner son sommet.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$a = 2 > 0$: f décroît puis croît. $f'(x) = 4x - 8 = 4(x - 2)$ est négative pour $x < 2$ et positive pour $x > 2$. $f(2) = 8 - 16 + 3 = -5$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

Forme canonique : $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$ (car $2(x^2 - 4x + 4) - 5 = 2x^2 - 8x + 3$), donc $f(x) \geq -5$ avec égalité en 2.

f est décroissante sur $] -\infty ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$; son minimum est -5, atteint en $x = 2$.

Question 2

$a = -3 < 0$: g croît puis décroît. $g'(x) = -6x + 6 = -6(x - 1)$ est positive pour $x < 1$, négative pour $x > 1$. $g(1) = -3 + 6 + 1 = 4$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Forme canonique : $g(x) = -3(x - 1)^2 + 4$.

g est croissante sur $] -\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$; son maximum est 4, atteint en $x = 1$.

Question 3

$p(x) = -2x^2 + 10x + c$ (car la dérivée de $-2x^2 + 10x$ est $-4x + 10$) et $p(0) = c = -1$.

Le coefficient de x^2 vaut $-2 < 0$: parabole tournée vers le bas. Le sommet a pour abscisse $\frac{-10}{2 \times (-2)} = \frac{5}{2}$ et $p\left(\frac{5}{2}\right) = -12,5 + 25 - 1 = 11,5$.

$p(x) = -2x^2 + 10x - 1$; parabole tournée vers le bas, de sommet $S\left(\frac{5}{2} ; \frac{23}{2}\right)$.

Exercice 8 (★★★) : un enclos adossé à un mur

Un agriculteur dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire dont un côté est un mur déjà existant (ce côté n'a pas besoin de grillage). On note x la longueur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprimer le côté parallèle au mur en fonction de x , puis donner l'ensemble des valeurs possibles de x .
2. Montrer que l'aire de l'enclos est $A(x) = -2x^2 + 60x$.
3. Étudier les variations de A et en déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale.
4. Retrouver ce résultat avec la forme canonique de A .

Correction de l'exercice 8

Question 1

Le grillage sert pour les deux côtés de longueur x et pour le côté parallèle au mur : celui-ci mesure $60 - 2x$. Il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$.

Le côté parallèle au mur mesure $60 - 2x$ et $x \in]0 ; 30[$.

Question 2

$$A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x.$$

Question 3

On étudie la formule de A sur $[0 ; 30]$ (aux bornes l'enclos est aplati : $A = 0$). $A'(x) = -4x + 60 = -4(x - 15)$: positive pour $x < 15$, négative pour $x > 15$. $A(15) = 15 \times 30 = 450$.

x	0		15		30
$A'(x)$		+	0	-	
A	0	$\nearrow$	450	$\searrow$	0

L'aire est maximale pour $x = 15$ m : l'enclos mesure 15 m sur 30 m (côté parallèle au mur), pour une aire de 450 m².

Question 4

$A(x) = -2(x^2 - 30x) = -2[(x - 15)^2 - 225] = -2(x - 15)^2 + 450$. Comme $(x - 15)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 450$ avec égalité si et seulement si $x = 15$.

On retrouve l'aire maximale 450 m², atteinte pour $x = 15$ m.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Extremums** d'un polynôme sur un intervalle fermé, en comparant les bornes (exercice 1).
- **Déterminer des paramètres** grâce à un extremum (exercice 2).
- Un **problème d'optimisation** complet, avec domaine, expression, variations et conclusion (exercices 3, 4 et 8).
- Les variations et l'extremum d'un **trinôme** selon le signe de a (exercice 7).
- Une **inégalité** démontrée par les variations (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le maximum de $f(x) = x^3 - 12x$ sur $[-3; 3]$ est :

- A. 9
- B. 16 (bonne réponse)
- C. -16
- D. 2

Justification : Le tableau donne $9 \nearrow 16 \searrow -16 \nearrow -9$: le maximum est $f(-2) = 16$.

2. Pour résoudre un problème d'optimisation, la première étape est :

- A. dériver tout de suite
- B. choisir la variable et préciser son domaine (bonne réponse)
- C. calculer le maximum
- D. écrire la conclusion

Justification : On commence par nommer la variable x et justifier son domaine, puis on exprime la grandeur en fonction de x .

3. Le minimum de $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$ vaut :

- A. 2
- B. 4 (**bonne réponse**)
- C. 0
- D. 5

Justification : $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$: f est minimale en 2 et $f(2) = 2 + 2 = 4$.

4. Le volume $V(x) = x(30 - 2x)^2$ sur $[0; 15]$ est maximal pour :

- A. $x = 15$
- B. $x = 0$
- C. $x = 10$
- D. $x = 5$ (**bonne réponse**)

Justification : $V'(x) = 12(x - 5)(x - 15)$: V croît jusqu'en 5 puis décroît, et $V(5) = 2\,000$.

5. Si f' passe de $+$ à $-$ en a , alors f admet en a :

- A. un minimum local
- B. **un maximum local (bonne réponse)**
- C. aucun extremum
- D. une tangente verticale

Justification : f monte puis descend : maximum local.