

Fiche 1 : signe de la dérivée et variations

Neuf exercices pour maîtriser le lien entre la dérivée et les variations :

- variations d'un trinôme avec la dérivée ;
- variations et extremums d'un polynôme de degré 3 ;
- une fonction **monotone** même quand f' s'annule ;
- variations de quotients ;
- reconstituer les variations de f à partir du **signe de f'** ;
- vrai/faux ;
- fonctions **paires** et **impaires** ;
- **lire une courbe** : variations, extremums, tangentes horizontales ;
- **tracer une allure** à partir d'un tableau.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la dérivée est **calculée** et **factorisée** ;
- le signe de f' est **justifié** ;
- le tableau de variations contient les **images** ;
- la conclusion est une **phrase** qui donne les variations et les extremums.

Le modèle de rédaction d'un tableau de variations

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$.

Le trinôme $x^2 - 2x - 3$, de racines -1 et 3 et de coefficient $a = 1 > 0$, est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

Donc $f' > 0$ sur $] -\infty ; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1 ; 3[$ et $f' > 0$ sur $]3 ; +\infty[$.

D'où le tableau de variations. »

- **Écris** la dérivée **factorisée**.
- **Justifie** le signe (racines, signe de a).
- **Conclus** avec les mots « croissante » et « décroissante », et les intervalles.

Les pièges classiques

- Étudier le signe de f au lieu de celui de f' .
- Croire que $f'(a) = 0$ donne toujours un extremum : il faut un **changement de signe**.
- Oublier les **images** ($f(-1)$, $f(3)$) dans le tableau.
- Se tromper entre « $f' < 0$ » et « f décroissante » en écrivant les flèches à l'envers.

Une flèche qui monte sous un signe moins, c'est un panneau « descente dangereuse » posé en haut d'une côte.

Exercice 1 (★) : variations d'un trinôme

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Donner l'extremum de f et préciser en quelle valeur de x il est atteint.

Correction de l'exercice 1

Question 1

f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$

$$f'(x) > 0 \iff x > 3 \text{ et } f'(x) < 0 \iff x < 3.$$

Question 2

$$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 3]$ et strictement croissante sur $[3 ; +\infty[$.

Question 3

f décroît jusqu'en 3, puis croît : elle est minimale en $x = 3$.

Le minimum de f est -4 , atteint en $x = 3$.

Exercice 2 (★★) : un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .
3. Donner les extremums locaux de f .
4. Quel est le maximum de f sur $[-2; 4]$? Quel est son minimum ?
5. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[-2; 4]$?

Correction de l'exercice 2

Question 1

f est un polynôme, dérivable sur $[-2; 4]$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour racines -1 et 3 (car $-1 + 3 = 2$ et $-1 \times 3 = -3$).

$$f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$$

Question 2

Le trinôme a un coefficient $a = 3 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0, f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7, f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25, f(4) = 64 - 48 - 36 + 2 = -18.$$

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	7	↘	-25	↗	-18

f est strictement croissante sur $[-2; -1]$, strictement décroissante sur $[-1; 3]$ et strictement croissante sur $[3; 4]$.

Question 3

f' s'annule en changeant de signe en -1 (de $+$ à $-$) et en 3 (de $-$ à $+$).

$f(-1) = 7$ est un maximum local et $f(3) = -25$ est un minimum local.

Question 4

On compare avec les valeurs aux bornes : $f(-2) = 0$ et $f(4) = -18$, qui sont comprises entre -25 et 7 .

Le maximum de f sur $[-2; 4]$ est 7 (en $x = -1$) et son minimum est -25 (en $x = 3$).

Question 5

Sur $[-2; -1]$, f va de 0 à 7 : la valeur 0 est atteinte en $x = -2$.

Sur $[-1; 3]$, f décroît de 7 à -25 : elle passe une fois par 0.

Sur $[3; 4]$, f va de -25 à -18 : elle reste strictement négative.

L'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions dans $[-2; 4]$.

Vérification : $f(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 1)$, dont les racines -2 et $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ donnent, dans $[-2; 4]$, $x = -2$ et $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \approx 0,21$.

Exercice 3 (★★) : monotone sans extremum

Étudier les variations de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Que vaut $g'(1)$? La fonction g admet-elle un extremum en 1 ?

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$f'(x) = 3x^2 + 3$. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 3 > 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (elle n'a pas d'extremum).

Question 2

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$.

Donc $g'(1) = 0$, mais $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 1$: **g' ne change pas de signe en 1.**

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle n'a pas d'extremum en 1, bien que $g'(1) = 0$.

Question 3

$g(1) = 1 - 3 + 3 = 1$ et $g'(1) = 0$: la tangente est horizontale.

$y = 1$

$g(x) - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$, qui est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$.

La courbe est en dessous de la tangente pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$: elle *traverse* sa tangente en 1.

Exercice 4 (★★) : variations de quotients

Étudier les variations de chaque fonction.

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ sur $]1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$, et $v > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif : f' est du signe de $1 - x^2$, c'est-à-dire positif entre -1 et 1 .

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ et } f(1) = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

f est décroissante sur $] -\infty; -1]$, croissante sur $[-1; 1]$, décroissante sur $[1; +\infty[$.

Question 2

$u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x - 1$, $v'(x) = 1$, et $v > 0$ sur $]1; +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{2(x - 1) - (2x + 1) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$$

Pour tout $x > 1$, $(x - 1)^2 > 0$, donc $g'(x) < 0$.

g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Exercice 5 (★★) : reconstituer les variations

Une fonction f est dérivable sur $[-3; 4]$. On connaît le signe de sa dérivée et quelques valeurs de f : $f(-3) = -2$, $f(-1) = 3$, $f(2) = -1$ et $f(4) = 2$.

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Donner les extremums locaux de f , puis le maximum et le minimum de f sur $[-3; 4]$.
3. Combien chacune des équations suivantes a-t-elle de solutions dans $[-3; 4]$: $f(x) = 0$, $f(x) = 3$, $f(x) = -2$?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Le signe de f' donne les variations, et les valeurs de f donnent les images.

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1	↗	2

f est croissante sur $[-3; -1]$, décroissante sur $[-1; 2]$ et croissante sur $[2; 4]$.

Question 2

Maximum local $f(-1) = 3$ et **minimum local** $f(2) = -1$.

On compare avec les bornes : $f(-3) = -2$ et $f(4) = 2$.

Le maximum de f sur $[-3; 4]$ est 3 (en -1) et son minimum est -2 (en -3).

Question 3

$f(x) = 0$: 0 est compris entre -2 et 3 sur $[-3; -1]$, entre 3 et -1 sur $[-1; 2]$, entre -1 et 2 sur $[2; 4]$: une solution par intervalle.

$f(x) = 0$ a 3 solutions.

$f(x) = 3$: 3 est le maximum de f , atteint seulement en $x = -1$ (sur $[2; 4]$, f ne dépasse pas 2).

$f(x) = 3$ a 1 solution.

$f(x) = -2$: -2 est le minimum de f , atteint seulement en $x = -3$ (sur les autres intervalles, $f \geq -1$).

$f(x) = -2$ a 1 solution.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a .
2. Si $f'(x) > 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors f est strictement croissante sur I .
3. Si f est strictement croissante sur I , alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
4. Un trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) admet toujours un extremum, atteint en $x = -\frac{b}{2a}$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Contre-exemple : $f(x) = x^3$ a $f'(0) = 0$, mais est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: pas d'extremum en 0. Il faut que f' change de signe.

Faux.

Affirmation 2

C'est le théorème du cours : $f' > 0$ sur I donne f strictement croissante sur I .

Vrai.

Affirmation 3

Contre-exemple : $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$. On a seulement $f' \geq 0$.

Faux.

Affirmation 4

$f'(x) = 2ax + b$ s'annule en $x = -\frac{b}{2a}$ et change de signe en ce point (car $a \neq 0$) : il y a un extremum (un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$).

Vrai.

Exercice 7 (★★) : fonctions paires et impaires

1. Pour chaque fonction, préciser l'ensemble de définition puis dire si elle est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre :

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; b) $g(x) = x^3 + x$; c) $h(x) = x^2 + x$; d) $k(x) = \frac{1}{x}$; e) $m(x) = \sqrt{x}$.

2. Une fonction p est **impaire** sur $[-5; 5]$. Son tableau de variations sur $[0; 5]$ est donné. Dresser son tableau sur $[-5; 5]$.

x	0		2		5
p	0	↗	4	↘	1

3. Même question pour une fonction q **paire** ayant le même tableau sur $[0; 5]$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$.

f est paire.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ et $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$.

g est impaire.

c) h est définie sur $\mathbb{R}$, $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$: $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$.

h n'est ni paire ni impaire.

d) k est définie sur $\mathbb{R}^*$ (ensemble symétrique) et $k(-x) = \frac{1}{-x} = -k(x)$.

k est impaire.

e) m est définie sur $[0; +\infty[$, qui n'est pas symétrique par rapport à 0 : $m(-1)$ n'existe pas.

m n'est ni paire ni impaire.

Question 2

Une fonction impaire a des variations **de même sens** de part et d'autre de 0 et vérifie

$p(-x) = -p(x)$: $p(-2) = -4$, $p(-5) = -1$ et $p(0) = 0$. Sur $[-5; -2]$, p décroît (comme sur $[2; 5]$) ; sur $[-2; 0]$ elle croît de -4 à 0.

x	-5		-2		2		5
p	-1	↘	-4	↗	4	↘	1

p est décroissante sur $[-5; -2]$, croissante sur $[-2; 2]$ (avec $p(0) = 0$) et décroissante sur $[2; 5]$.

Question 3

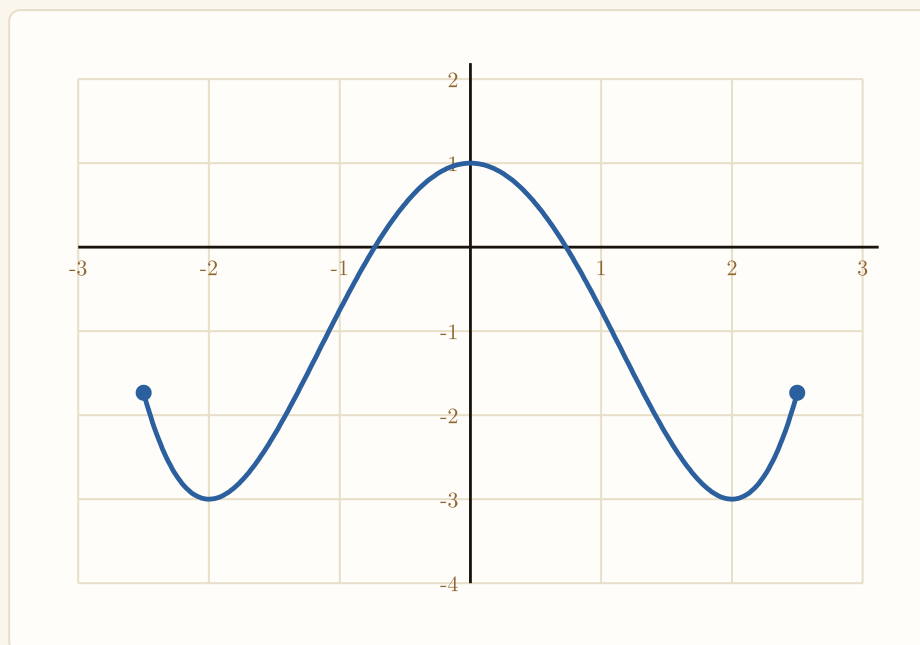
Une fonction paire a des variations **contraires** de part et d'autre de 0 et vérifie $q(-x) = q(x)$: $q(-5) = 1$, $q(-2) = 4$, $q(0) = 0$.

x	-5		-2		0		2		5
q	1	↗	4	↘	0	↗	4	↘	1

q est croissante sur $[-5; -2]$, décroissante sur $[-2; 0]$, croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 5]$.

Exercice 8 (★★) : lire une courbe

Soit f la fonction dérivable sur $[-2,5; 2,5]$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Courbe de f sur $[-2,5; 2,5]$

1. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f (avec les images aux points où la courbe change de sens).
2. Donner les extremums locaux de f , puis son maximum et son minimum sur $[-2,5; 2,5]$.
3. Que valent $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$? Donner les équations des tangentes horizontales. Quel est le signe de $f'(x)$ sur $]0; 2[$?
4. Par lecture graphique, combien de solutions ont les équations $f(x) = -2$, $f(x) = 1$ et $f(x) = -3$?
5. Que peut-on conjecturer sur la symétrie de $\mathcal{C}_f$? On admet $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$: démontrer la conjecture et retrouver les abscisses des extremums avec f' .

Correction de l'exercice 8

Question 1

La courbe descend de $x = -2,5$ jusqu'au point $(-2; -3)$, monte jusqu'au point $(0; 1)$, descend jusqu'au point $(2; -3)$ puis remonte. Aux bornes, $f(\pm 2,5) \approx -1,7$.

x	$-2,5$		-2		0		2		$2,5$
f	$\approx -1,7$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\approx -1,7$

Question 2

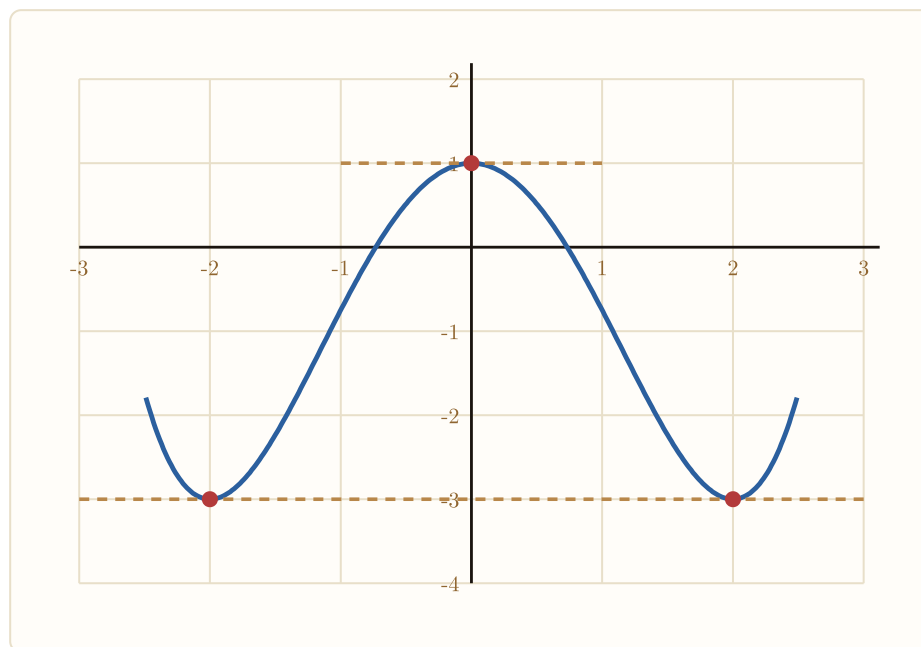
Extremums locaux : $f(0) = 1$ est un maximum local ; $f(-2) = -3$ et $f(2) = -3$ sont des minimums locaux.

Aux bornes, $f(\pm 2,5) \approx -1,7$: ces valeurs sont comprises entre -3 et 1 .

Le maximum de f sur $[-2,5; 2,5]$ est 1 (en $x = 0$) et son minimum est -3 (en $x = -2$ et en $x = 2$).

Question 3

En un extremum local intérieur, la tangente est horizontale : $f'(-2) = f'(0) = f'(2) = 0$. Les tangentes passent par $(-2; -3)$, $(0; 1)$ et $(2; -3)$.



Les trois tangentes horizontales de la courbe de f

$f'(-2) = f'(0) = f'(2) = 0$; tangentes : $y = -3$ (en -2 et en 2) et $y = 1$ (en 0). Sur $]0; 2[$, f décroît donc $f'(x) < 0$.

Question 4

On compte les points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale $y = k$.

$f(x) = -2$: 4 solutions ; $f(x) = 1$: 1 solution ($x = 0$) ; $f(x) = -3$: 2 solutions ($x = \pm 2$).

Question 5

La courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on conjecture que f est paire. Preuve : $f(-x) = \frac{(-x)^4}{4} - 2(-x)^2 + 1 = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1 = f(x)$.

$f'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ s'annule en -2 , 0 et 2 en changeant de signe : on retrouve les trois extremums locaux.

f est paire : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 9 (★★) : tracer une allure

Une fonction g est dérivable sur $[-3; 3]$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-3		-1		2		3
g	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

- Donner le signe de g' sur chaque intervalle et les valeurs de $g'(-1)$ et $g'(2)$.
- Tracer dans un repère une courbe possible pour g , avec ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 2 .
- La fonction g peut-elle être paire ? impaire ?

Correction de l'exercice 9

Question 1

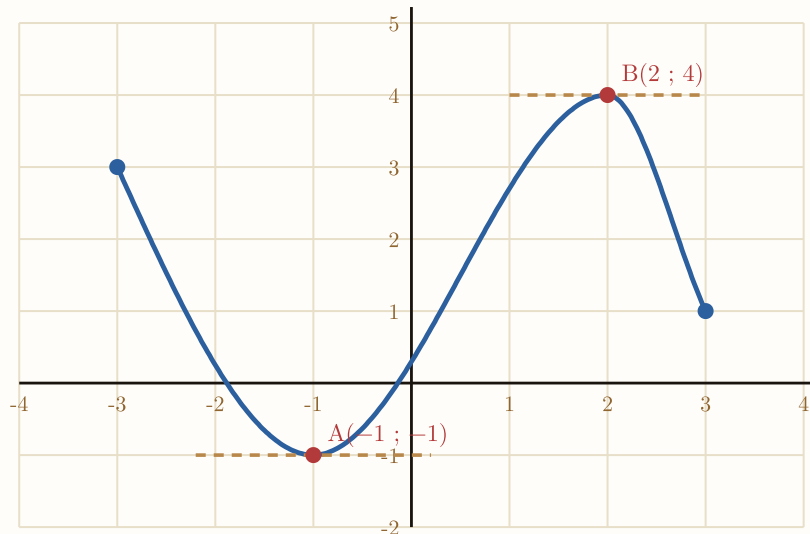
g décroît sur $[-3; -1]$, croît sur $[-1; 2]$ et décroît sur $[2; 3]$. En -1 et en 2 , il y a un extremum local intérieur : la tangente est horizontale.

x	-3		-1		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

$g' < 0$ sur $] -3; -1[$, $g' > 0$ sur $] -1; 2[$, $g' < 0$ sur $] 2; 3[$; $g'(-1) = g'(2) = 0$.

Question 2

On place les points $(-3; 3)$, $(-1; -1)$, $(2; 4)$ et $(3; 1)$, on trace les tangentes horizontales $y = -1$ et $y = 4$ aux points d'abscisses -1 et 2 , puis on relie les points en respectant les variations.

Une allure possible de la courbe de g

Toute courbe qui respecte le tableau et les tangentes horizontales convient (la figure donne une allure possible).

Question 3

Si g était paire, on aurait $g(-3) = g(3)$; or $g(-3) = 3$ et $g(3) = 1$. Si g était impaire, on aurait $g(-3) = -g(3) = -1$; or $g(-3) = 3$.

g n'est ni paire ni impaire.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Dresser un tableau de variations** complet, avec dérivée factorisée et signe justifié (exercices 1, 2 et 4).
- **Distinguer** $f'(a) = 0$ et extremum (exercice 3).
- **Exploiter** un tableau ou une courbe : extremums, tangentes horizontales, images (exercices 2, 5, 8 et 9).
- Reconnaître une fonction **paire ou impaire** et s'en servir pour les variations (exercice 7).
- Un **vrai/faux** sur le lien entre f' et f (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si $f'(x) = -2$ pour tout réel x , la fonction f est :

- A. strictement croissante
- B. constante

C. **strictement décroissante (bonne réponse)**

D. nulle

Justification : $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$: f est strictement décroissante.

2. Les variations de $f(x) = x^2 - 4x$ sont :

A. croissante sur $] - \infty ; 2]$, puis décroissante

B. **décroissante sur $] - \infty ; 2]$, puis croissante (bonne réponse)**

C. croissante sur $\mathbb{R}$

D. décroissante sur $\mathbb{R}$

Justification : $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$ est négative avant 2 et positive après : f décroît puis croît.

3. $f'(x) = 3(x - 1)(x + 2)$. Sur quel ensemble f' est-elle strictement positive ?

A. $] - 2 ; 1[$

B. $] - \infty ; -2[\cup] 1 ; +\infty[$ (**bonne réponse**)

C. $] 1 ; +\infty[$

D. $] - \infty ; 1[$

Justification : Le trinôme a un coefficient $a = 3 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines -2 et 1 .

4. f' s'annule en 2 en passant de $+$ à $-$. Alors f admet en 2 :

A. un minimum local

B. **un maximum local (bonne réponse)**

C. aucun extremum

D. un point anguleux

Justification : f monte puis descend : elle atteint un maximum local en 2.

5. Pour $f(x) = x^3$, laquelle de ces affirmations est vraie ?

A. **$f'(0) = 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (bonne réponse)**

B. f admet un minimum en 0

C. $f'(0) \neq 0$

D. f est décroissante sur $] - \infty ; 0]$

Justification : $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, nulle seulement en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum.