

Contrôle : chapitre 4, Variations et courbes représentatives

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Étude d'un polynôme de degré 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$. (1,5 points)
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 3]$, en indiquant les images aux valeurs remarquables. (2 points)
3. Donner les extremums locaux de f puis le maximum et le minimum de f sur $[0; 3]$, en précisant en quelles valeurs de x ils sont atteints. (1,5 points)
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ puis de l'équation $f(x) = 5$ sur $[0; 3]$. Justifier à l'aide du tableau de variations. (2 points)

Exercice 2 (7 points) : Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend chaque semaine x centaines de pièces, avec $x \in [0; 8]$. Le coût total de production, en milliers d'euros, est donné par $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 8$. Chaque centaine de pièces est vendue 30 milliers d'euros, donc la recette est $R(x) = 30x$ (en milliers d'euros). On note $B(x)$ le bénéfice, en milliers d'euros, c'est-à-dire $B(x) = R(x) - C(x)$.

On considère le script Python suivant.

```
def B(x):
    return -x**3 + 6*x**2 + 15*x - 8

k = 0
while B(k / 10) < 0:
    k = k + 1
print(k / 10)
```

1. Montrer que $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 8$. (1 point)
2. Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x) = -3(x+1)(x-5)$. (1,5 points)
3. Dresser le tableau de variations de B sur $[0; 8]$. En déduire la production hebdomadaire qui rend le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice maximal. (1,5 points)
4. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$ dans $[0; 8]$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α et de β d'amplitude 0,1. (1,5 points)
5. On exécute le script Python donné dans l'introduction de l'exercice. (a) Quelle valeur affiche-t-il ? Que représente-t-elle pour l'entreprise ? (b) Modifier ce script (sans changer la fonction B) pour que le script affiche la plus grande valeur $\frac{k}{10}$ vérifiant $B\left(\frac{k}{10}\right) \geq 0$, sachant que $B(8) < 0$. (1,5 points)

Exercice 3 (6 points) : Un quotient et une inégalité

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et d la droite d'équation $y = x - 1$.

1. Justifier que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. (1,5 points)
2. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 2$. (2 points)
3. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) - (x - 1) = \frac{4}{x + 1}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de d . (1,5 points)
4. Un élève affirme : « Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum en a ». Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier à l'aide de la fonction cube $h(x) = x^3$. (1 point)