

Contrôle : chapitre 4, Variations et courbes représentatives

Durée : 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Étude d'un polynôme de degré 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$. (1,5 points)
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 3]$, en indiquant les images aux valeurs remarquables. (2 points)
3. Donner les extremums locaux de f puis le maximum et le minimum de f sur $[0; 3]$, en précisant en quelles valeurs de x ils sont atteints. (1,5 points)
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ puis de l'équation $f(x) = 5$ sur $[0; 3]$. Justifier à l'aide du tableau de variations. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

f est un polynôme, donc dérivable sur $[0; 3]$, et $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 12 = 6x^2 - 18x + 12$.

Par ailleurs, $6(x - 1)(x - 2) = 6(x^2 - 3x + 2) = 6x^2 - 18x + 12$.

Donc $f'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$.

Barème : 1 point pour le calcul de la dérivée ; 0,5 point pour la vérification de la forme factorisée.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (2 points)

Le trinôme $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ a pour racines 1 et 2 et son coefficient dominant est $1 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Comme $6 > 0$, $f'(x)$ a le

même signe que ce trinôme.

Donc $f' > 0$ sur $[0; 1[$, $f' < 0$ sur $]1; 2[$ et $f' > 0$ sur $]2; 3]$.

On calcule : $f(0) = -2$, $f(1) = 2 - 9 + 12 - 2 = 3$, $f(2) = 16 - 36 + 24 - 2 = 2$ et $f(3) = 54 - 81 + 36 - 2 = 7$.

x	0		1		2		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	-2	↗	3	↘	2	↗	7

f est strictement croissante sur $[0; 1]$, strictement décroissante sur $[1; 2]$ et strictement croissante sur $[2; 3]$.

Barème : 0,5 point pour la justification du signe de f' (racines et signe du coefficient dominant) ; 0,5 point pour les images $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ correctes ; 1 point pour le tableau de variations cohérent avec le signe de f' .

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

f' s'annule en changeant de signe en 1 (de + à -) et en 2 (de - à +) : $f(1) = 3$ est un **maximum local** et $f(2) = 2$ est un **minimum local**.

Sur $[0; 3]$, on compare avec les bornes : les valeurs prises par f sont toutes comprises entre $f(0) = -2$ et $f(3) = 7$.

Le maximum de f sur $[0; 3]$ est 7, atteint en $x = 3$; le minimum est -2, atteint en $x = 0$.

Barème : 0,5 point pour les extremums locaux avec leur nature ; 1 point pour le maximum et le minimum sur $[0; 3]$ (comparaison avec les bornes) et leurs abscisses.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (2 points)

f est continue (car dérivable) et strictement monotone sur chacun des intervalles $[0; 1]$, $[1; 2]$ et $[2; 3]$: sur chacun, une valeur comprise entre les images des bornes est atteinte exactement une fois.

Pour $k = \frac{5}{2}$: $-2 < \frac{5}{2} < 3$ sur $[0; 1]$, $2 < \frac{5}{2} < 3$ sur $[1; 2]$ et $2 < \frac{5}{2} < 7$ sur $[2; 3]$: une solution dans chacun des trois intervalles.

L'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ a **trois** solutions.

Pour $k = 5$: $5 > 3$ donc 5 n'est atteint ni sur $[0; 1]$ (où $f \leq 3$) ni sur $[1; 2]$ (où $f \leq 3$) ; sur $[2; 3]$, $2 < 5 < 7$: une seule solution.

L'équation $f(x) = 5$ a **une seule** solution.

Barème : 1 point pour $k = \frac{5}{2}$: trois solutions, justifiées intervalle par intervalle ; 1 point pour $k = 5$: une solution, justifiée (le maximum local vaut $3 < 5$).

Exercice 2 (7 points) : Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend chaque semaine x centaines de pièces, avec $x \in [0; 8]$. Le coût total de production, en milliers d'euros, est donné par $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 8$. Chaque centaine de pièces est vendue 30 milliers d'euros, donc la recette est $R(x) = 30x$ (en milliers d'euros). On note $B(x)$ le bénéfice, en milliers d'euros, c'est-à-dire $B(x) = R(x) - C(x)$.

On considère le script Python suivant.

```
def B(x):
    return -x**3 + 6*x**2 + 15*x - 8

k = 0
while B(k / 10) < 0:
    k = k + 1
print(k / 10)
```

1. Montrer que $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 8$. (1 point)
2. Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x) = -3(x + 1)(x - 5)$. (1,5 points)
3. Dresser le tableau de variations de B sur $[0; 8]$. En déduire la production hebdomadaire qui rend le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice maximal. (1,5 points)
4. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$ dans $[0; 8]$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α et de β d'amplitude 0,1. (1,5 points)
5. On exécute le script Python donné dans l'introduction de l'exercice. (a) Quelle valeur affiche-t-il ? Que représente-t-elle pour l'entreprise ? (b) Modifier ce script (sans changer la fonction B) pour que le script affiche la plus grande valeur $\frac{k}{10}$ vérifiant $B\left(\frac{k}{10}\right) \geq 0$, sachant que $B(8) < 0$. (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

$$B(x) = R(x) - C(x) = 30x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 8) = 30x - x^3 + 6x^2 - 15x - 8.$$

$$\text{Donc } B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 8.$$

Barème : 0,5 point pour la soustraction avec les parenthèses (changement de signes) ; 0,5 point pour la simplification et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

B est un polynôme, donc dérivable sur $[0; 8]$: $B'(x) = -3x^2 + 12x + 15$.

Or $-3(x+1)(x-5) = -3(x^2 - 4x - 5) = -3x^2 + 12x + 15$.

Donc $B'(x) = -3(x+1)(x-5)$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée ; 1 point pour la factorisation (ou sa vérification par développement).

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Pour $x \in [0; 8]$, $x+1 > 0$ donc $B'(x)$ est du signe de $-(x-5)$: $B'(x) > 0$ sur $[0; 5[$ et $B'(x) < 0$ sur $]5; 8]$.

$B(0) = -8$, $B(5) = -125 + 150 + 75 - 8 = 92$ et $B(8) = -512 + 384 + 120 - 8 = -16$.

x	0		5		8
$B'(x)$		+	0	-	
B	-8	↗	92	↘	-16

Le bénéfice est maximal pour $x = 5$, soit 500 pièces par semaine ; il vaut alors 92 milliers d'euros, soit 92 000 euros.

Barème : 0,5 point pour le signe de B' justifié ; 0,5 point pour le tableau avec les images ; 0,5 point pour la conclusion en contexte (production, bénéfice, unités).

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1,5 points)

Sur $[0; 5]$, B est continue et strictement croissante de $-8 < 0$ à $92 > 0$: l'équation $B(x) = 0$ a exactement une solution α dans $[0; 5]$.

Sur $[5; 8]$, B est continue et strictement décroissante de $92 > 0$ à $-16 < 0$: l'équation $B(x) = 0$ a exactement une solution β dans $[5; 8]$.

À la calculatrice : $B(0,4) = -1,104 < 0$ et $B(0,5) = 0,875 > 0$; $B(7,7) \approx 6,707 > 0$ et $B(7,8) \approx -0,512 < 0$.

L'équation a exactement deux solutions, avec $0,4 < \alpha < 0,5$ et $7,7 < \beta < 7,8$.

Barème : 1 point pour l'existence et l'unicité sur chaque intervalle (variations, valeurs des images) ; 0,5 point pour les deux encadrements.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1,5 points)

(a) La boucle augmente k tant que $B\left(\frac{k}{10}\right) < 0$: elle s'arrête au premier multiple de 0,1 pour lequel le bénéfice est positif. Comme $B(0,4) < 0$ et $B(0,5) > 0$, le script affiche 0.5.

Il s'agit de la production minimale, au pas de 0,1 centaine, à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice positif : 0,5 centaine, soit 50 pièces par semaine.

(b) On part de la borne $x = 8$ (c'est-à-dire $k = 80$) et on diminue k tant que le bénéfice est négatif :

```
k = 80
while B(k / 10) < 0:
    k = k - 1
print(k / 10)
```

Ce script affiche 7.7, car $B(7,7) > 0$ et $B(7,8) < 0$.

Barème : 0,5 point pour la valeur affichée 0.5 ; 0,5 point pour l'interprétation en contexte ; 0,5 point pour le script modifié (initialisation $k = 80$, décrémentation).

Exercice 3 (6 points) : Un quotient et une inégalité

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et d la droite d'équation $y = x - 1$.

1. Justifier que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. (1,5 points)
2. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 2$. (2 points)
3. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) - (x - 1) = \frac{4}{x + 1}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de d . (1,5 points)
4. Un élève affirme : « Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum en a ». Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier à l'aide de la fonction cube $h(x) = x^3$. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

g est un quotient de deux polynômes dont le dénominateur $x + 1$ ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ (car $x + 1 \geq 1$) : elle est dérivable sur cet intervalle.

$$\text{Avec } u(x) = x^2 + 3 \text{ et } v(x) = x + 1, \text{ on a } u'(x) = 2x, v'(x) = 1 \text{ et } g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Enfin } (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3.$$

$$\text{Donc } g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Barème : 0,5 point pour la justification de la dérivabilité ; 0,5 point pour la formule du quotient appliquée correctement ; 0,5 point pour la simplification et la factorisation.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Pour $x \geq 0$: $(x+1)^2 > 0$ et $x+3 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x-1$: $g'(x) < 0$ sur $[0; 1[$ et $g'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

$$g(0) = 3 \text{ et } g(1) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	

g est strictement décroissante sur $[0; 1]$ puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$: elle admet un **minimum** égal à $g(1) = 2$ sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 2$.

Barème : 0,5 point pour le signe de g' justifié ; 0,5 point pour le tableau (flèches et images $g(0)$, $g(1)$) ; 0,5 point pour le minimum $g(1) = 2$; 0,5 point pour la conclusion $g(x) \geq 2$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

$$g(x) - (x - 1) = \frac{x^2 + 3 - (x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \frac{x^2 + 3 - (x^2 - 1)}{x + 1} = \frac{4}{x + 1}.$$

Pour $x \geq 0$, $x + 1 > 0$ donc $g(x) - (x - 1) > 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est **strictement au-dessus** de la droite d sur $[0; +\infty[$.

Barème : 1 point pour la mise au même dénominateur et le calcul ; 0,5 point pour le signe et la position relative.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

Elle est **fausse**. Pour $h(x) = x^3$, on a $h'(x) = 3x^2$ donc $h'(0) = 0$.

Pourtant $h'(x) > 0$ pour $x \neq 0$: h' ne change pas de signe en 0 et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $h(x) < h(0) = 0$ pour $x < 0$ et $h(x) > 0$ pour $x > 0$: $h(0)$ n'est ni un maximum ni un minimum, même local.

Pour avoir un extremum, il faut que f' s'annule **en changeant de signe**.

Barème : 0,5 point pour la réponse « fausse » avec $h'(0) = 0$; 0,5 point pour la justification de l'absence d'extremum (pas de changement de signe de h').

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	7
Exercice 2	7
Exercice 3	6
Total	20