

Dérivation

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Produits et quotients

Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle où elle est dérivable (à préciser) :

1. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 1)$;

2. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$;

3. $h(x) = x\sqrt{x}$;

4. $k(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$;

5. $m(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

6. $n(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$.

Pour la question 1, vérifier le résultat en développant d'abord $f(x)$.

Exercice S2 : Tangente et approximation affine

Soit f la fonction racine carrée, avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

- Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 4.
- À l'aide de l'approximation affine $f(4 + h) \approx f(4) + f'(4)h$, donner une valeur approchée de $\sqrt{4,04}$ et de $\sqrt{3,96}$.
- Comparer avec les valeurs données par la calculatrice. Quel est l'écart ?
- Écrire une fonction Python `taux(f, a, h)` qui renvoie le taux de variation de f entre a et $a + h$. L'utiliser avec la racine carrée, $a = 4$ et $h = 0,1$; $0,01$; $0,001$. Que conjecturer ?
- Écrire une fonction `secantes(f, a, pas, n)` qui renvoie la liste des coefficients directeurs des sécantes à la courbe de f entre les points d'abscisses a et $a + k \times \text{pas}$, pour $k = 1, 2, \dots, n$. Quelle liste, arrondie au millièmes, obtient-on avec la racine carrée, $a = 4$, $\text{pas} = 0.1$ et $n = 3$?

Exercice S3 : Tangentes particulières

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.
- Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d d'équation $y = 15x + 2$, puis donner l'équation de ces tangentes.
- Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur -15 ?

Exercice S4 : Position et vitesse d'un mobile

La position d'un mobile sur un axe est donnée, pour $t \in [0 ; 4]$ (en secondes), par $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres).

- Calculer la vitesse instantanée $v(t) = s'(t)$ et la factoriser.
- Calculer $v(0)$ et $v(2)$. Que signifie le signe de $v(2)$?
- À quels instants le mobile s'arrête-t-il ? Où se trouve-t-il alors ?
- Calculer la vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 3$.
- Décrire le mouvement : quand le mobile avance-t-il, quand recule-t-il ?

Exercice S5 : Retrouver une fonction

- Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sa courbe passe par $A(0 ; 1)$ et admet au point d'abscisse 1 la tangente d'équation $y = 2x - 1$. Déterminer a , b et c .

2. Soit $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Sa courbe passe par $B(1; 5)$ et la tangente en B a pour coefficient directeur -3 .
- Déterminer a et b .
 - Déterminer l'équation de la tangente T en B .
 - Montrer que $g(x) - (-3x + 8) = \frac{4(x-1)^2}{x}$, puis étudier la position de la courbe par rapport à T .

Exercice S6 : Tangentes parallèles

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x$, puis donner les équations de ces tangentes.
- Y a-t-il des points où la tangente est horizontale? Lesquels?

Exercice S7 : Tangente qui recoupe la courbe

Soit $f(x) = x^3 - x$.

- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.
- Montrer que $f(x) - (2x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$.
- En déduire que T recoupe la courbe en un second point, dont on donnera les coordonnées.

Exercice S8 : Bénéfice marginal

Une entreprise fabrique q milliers d'objets ($0 \leq q \leq 50$). Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(q) = -q^2 + 60q - 500$.

- Calculer $B(20)$ et $B(21)$, puis $B(21) - B(20)$.
- Calculer $B'(q)$ puis $B'(20)$. Interpréter ce nombre et le comparer à $B(21) - B(20)$.
- Résoudre $B'(q) = 0$. Que représente la tangente à la courbe en ce point?
- Montrer que $B(q) = 400 - (q - 30)^2$. En déduire le bénéfice maximal et la production correspondante.

Exercice S9 : Étude d'un quotient

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ sur $I =]1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- Montrer que $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur I .
- Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$. Retrouver $f'(x)$ à partir de cette écriture.
- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.
- Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente T_0 est horizontale. Montrer que $f(x) - 1 = \frac{(x-2)^2}{x-1}$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 .
- Montrer qu'aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ n'a pour coefficient directeur 1.

Exercice S10 : Coût moyen et coût marginal

Une entreprise fabrique q centaines d'objets ($0 < q \leq 40$). Le coût total, en centaines d'euros, est $C(q) = q^2 + 20q + 400$. Le coût moyen par objet, en euros, est $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- Montrer que $C_m(q) = q + 20 + \frac{400}{q}$. Calculer $C'_m(q)$ et montrer que $C'_m(q) = \frac{(q-20)(q+20)}{q^2}$.
- Étudier le signe de $C'_m(q)$ sur $]0; 40]$.
- Calculer le coût marginal $C'(20)$ et le coût moyen $C_m(20)$. Comparer.

4. Montrer que $C_m(q) - 60 = \frac{(q - 20)^2}{q}$. En déduire le coût moyen minimal et la production pour laquelle il est atteint.