

Corrigé : Dérivation

Fiche Standard

S1.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $u(x) = 2x - 3$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$: $f'(x) = 2(x^2 + 1) + (2x - 3) \times 2x = 6x^2 - 6x + 2$. Vérification : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$, dont la dérivée est $6x^2 - 6x + 2$.
2. g est dérivable sur $] -\infty ; -2[$ et sur $] -2 ; +\infty[$. $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = x + 2$, $v'(x) = 1$:

$$g'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}.$$
3. Sur $]0 ; +\infty[$, avec $u(x) = x$, $v(x) = \sqrt{x}$: $h'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.
4. Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $-3 < 0$: ce trinôme ne s'annule pas, k est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $v(x) = x^2 + x + 1$, $v'(x) = 2x + 1$: $k'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.
5. m est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$: $m'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.
6. n est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$. $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$:

$$n'(x) = \frac{2x^2 - (2x+1) \times 2x}{x^4} = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{2(x+1)}{x^3}.$$

S2.

1. $f(4) = 2$ et $f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$. $T : y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1$.
2. $\sqrt{4,04} \approx 2 + \frac{0,04}{4} = 2,01$ et $\sqrt{3,96} \approx 2 + \frac{-0,04}{4} = 1,99$.
3. La calculatrice donne $\sqrt{4,04} \approx 2,009975$ et $\sqrt{3,96} \approx 1,989975$: l'écart est d'environ $2,5 \times 10^{-5}$ dans les deux cas.
4. Programme :

```
from math import sqrt

def taux(f, a, h):
    return (f(a + h) - f(a)) / h

for h in (0.1, 0.01, 0.001):
    print(taux(sqrt, 4, h))
```

On obtient environ 0,248457 ; 0,249844 ; 0,249984. **Conclusion** : on conjecture que le taux tend vers $0,25 = f'(4)$ (cela illustre le résultat sans le démontrer).

5. Programme :

```
def secantes(f, a, pas, n):
    L = []
    for k in range(1, n + 1):
        h = k * pas
        L.append((f(a + h) - f(a)) / h)
    return L
```

Pour `secantes(sqrt, 4, 0.1, 3)`, les pas valent 0,1, 0,2 et 0,3 : on obtient la liste des trois valeurs 0,248, 0,247 et 0,245 (environ). Les coefficients directeurs des sécantes diminuent légèrement quand le pas augmente et se rapprochent de $f'(4) = 0,25$ quand le pas diminue.

S3.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$.

2. $f'(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$. Comme $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$, **les points sont** $(-1; 10)$ et $(3; -22)$, avec les tangentes $y = 10$ et $y = -22$.
3. d a pour coefficient directeur 15. $f'(x) = 15 \iff 3x^2 - 6x - 24 = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x-4)(x+2) = 0$, donc $x = 4$ ou $x = -2$. $f(4) = 64 - 48 - 36 + 5 = -15$ et $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$. Tangente en 4 : $y = 15(x - 4) - 15 = 15x - 75$. Tangente en -2 : $y = 15(x + 2) + 3 = 15x + 33$. **Conclusion** : deux points, $(4; -15)$ et $(-2; 3)$; ces tangentes sont distinctes de d (ordonnées à l'origine différentes de 2).
4. $f'(x) = -15 \iff 3x^2 - 6x + 6 = 0 \iff x^2 - 2x + 2 = 0$. Le discriminant vaut $4 - 8 = -4 < 0$. **Conclusion** : aucune tangente n'a pour coefficient directeur -15.

S4.

1. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$.
2. $v(0) = 9$ m/s. $v(2) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ m/s : la vitesse est négative, le mobile se déplace dans le sens négatif de l'axe (il recule).
3. $v(t) = 0 \iff t = 1$ ou $t = 3$. $s(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ m et $s(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ m. **Conclusion** : le mobile s'arrête à $t = 1$ s (position 4 m) et à $t = 3$ s (position 0 m).
4. $\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 4}{2} = -2$ m/s.
5. $v > 0$ sur $]0; 1[$: le mobile avance ; $v < 0$ sur $]1; 3[$: il recule ; $v > 0$ sur $]3; 4]$: il avance de nouveau.

S5.

1. $f(0) = c = 1$. $f'(x) = 2ax + b$. La tangente en 1 est $y = 2x - 1$: $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, donc $a + b + 1 = 1$, et $f'(1) = 2$, donc $2a + b = 2$. On obtient $a + b = 0$ et $2a + b = 2$: $a = 2$, $b = -2$. **Conclusion** : $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Vérification : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4 - 2 = 2$.
2. a) $g(1) = a + b = 5$. $g'(x) = a - \frac{b}{x^2}$, donc $g'(1) = a - b = -3$. En additionnant : $2a = 2$, donc $a = 1$ et $b = 4$. **Conclusion** : $g(x) = x + \frac{4}{x}$.
- b) $T : y = -3(x - 1) + 5 = -3x + 8$.
- c) $g(x) - (-3x + 8) = x + \frac{4}{x} + 3x - 8 = \frac{4x^2 - 8x + 4}{x} = \frac{4(x-1)^2}{x}$. Le numérateur est positif ou nul, donc la différence a le signe de x (et s'annule en $x = 1$). **Conclusion** : sur $]0; +\infty[$, la courbe est au-dessus de T (un seul point commun, d'abscisse 1) ; sur $] -\infty; 0[$, elle est en dessous de T .

S6.

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
2. $f'(x) = \frac{3}{4} \iff \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$. En 2 : $f(2) = \frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{4}(x - 2) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + 1$. En -2 : $f(-2) = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{4}(x + 2) - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - 1$.
3. $f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$. **Conclusion** : deux points à tangente horizontale, $(1; 2)$ et $(-1; -2)$, avec les tangentes $y = 2$ et $y = -2$.

S7.

1. $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$: $T : y = 2(x - 1) = 2x - 2$.
2. $f(x) - (2x - 2) = x^3 - 3x + 2$. Par ailleurs $(x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 - 3x + 2$. D'où l'égalité.
3. $f(x) = 2x - 2 \iff (x - 1)^2(x + 2) = 0 \iff x = 1$ (point de tangence) ou $x = -2$. Comme $f(-2) = -8 + 2 = -6 = 2 \times (-2) - 2$, **le second point commun est** $(-2; -6)$.

S8.

1. $B(20) = -400 + 1200 - 500 = 300$, $B(21) = -441 + 1260 - 500 = 319$, $B(21) - B(20) = 19$.
2. $B'(q) = -2q + 60$, donc $B'(20) = 20$. **Interprétation** : à 20 milliers d'objets, produire un millier d'objets de plus augmente le bénéfice d'environ 20 milliers d'euros ; c'est proche de la variation

exacte 19.

3. $B'(q) = 0 \iff q = 30$. La tangente à la courbe au point d'abscisse 30 est horizontale (d'équation $y = B(30) = 400$).
4. $400 - (q - 30)^2 = 400 - q^2 + 60q - 900 = -q^2 + 60q - 500 = B(q)$. Comme $(q - 30)^2 \geq 0$, $B(q) \leq 400$, avec égalité si et seulement si $q = 30$. **Conclusion** : le bénéfice maximal est de 400 milliers d'euros, pour 30 milliers d'objets.

S9.

1. $u(x) = x^2 - 3x + 3$, $u'(x) = 2x - 3$, $v(x) = x - 1$ (qui ne s'annule pas sur I), $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 5x + 3 - x^2 + 3x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Sur I , $x > 0$ et $(x - 1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$. **Conclusion** : $f'(x) < 0$ sur $]1; 2[$, $f'(2) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$.

2. $x - 2 + \frac{1}{x - 1} = \frac{(x - 2)(x - 1) + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = f(x)$. En dérivant : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$: on retrouve le résultat.
3. $f(3) = \frac{9 - 9 + 3}{2} = \frac{3}{2}$ et $f'(3) = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4}$. $T : y = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.
4. $f'(x) = 0 \iff x = 2$ (car $x = 0 \notin I$). $f(2) = \frac{4 - 6 + 3}{1} = 1$: T_0 a pour équation $y = 1$, au point $(2; 1)$. De plus $f(x) - 1 = \frac{x^2 - 3x + 3 - (x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$. Sur I , $x - 1 > 0$ et $(x - 2)^2 \geq 0$: **la courbe est au-dessus de T_0 sur I** , avec un seul point commun, d'abscisse 2.
5. D'après la question 2, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}$ et $\frac{1}{(x - 1)^2} > 0$ sur I : $f'(x) < 1$ pour tout $x \in I$.
Conclusion : aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ n'a pour coefficient directeur 1.

S10.

1. $C_m(q) = \frac{q^2 + 20q + 400}{q} = q + 20 + \frac{400}{q}$. Alors $C'_m(q) = 1 - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 400}{q^2} = \frac{(q - 20)(q + 20)}{q^2}$.
2. Sur $]0; 40]$, $q^2 > 0$ et $q + 20 > 0$: $C'_m(q)$ a le signe de $q - 20$. **Conclusion** : $C'_m(q) < 0$ pour $q < 20$, $C'_m(20) = 0$ et $C'_m(q) > 0$ pour $q > 20$.
3. $C'(q) = 2q + 20$, donc $C'(20) = 60$; $C_m(20) = 20 + 20 + \frac{400}{20} = 60$. **Conclusion** : pour $q = 20$, le coût marginal est égal au coût moyen (60 € par objet), et c'est là que C'_m s'annule.
4. $C_m(q) - 60 = q - 40 + \frac{400}{q} = \frac{q^2 - 40q + 400}{q} = \frac{(q - 20)^2}{q} \geq 0$ car $q > 0$. Donc $C_m(q) \geq 60$, avec égalité si et seulement si $q = 20$. **Conclusion** : le coût moyen minimal est de 60 € par objet, atteint pour 2000 objets.