

Dérivation**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations du programme

Démontrer que (pour les questions 1 à 5, utiliser le taux de variation) :

- la fonction carré est dérivable en tout réel a et $f'(a) = 2a$;
- la fonction inverse est dérivable en tout réel $a \neq 0$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$;
- la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 ;
- la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 (distinguer $h > 0$ et $h < 0$) ;
- pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout réel a et sa dérivée en a vaut na^{n-1} (utiliser l'égalité $X^n - Y^n = (X - Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \dots + XY^{n-2} + Y^{n-1})$ avec $X = a + h$ et $Y = a$, et admettre que $(a + h)^k$ se rapproche de a^k quand h se rapproche de 0) ;
- une fonction f dérivable en a admet en $A(a; f(a))$ la tangente d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (la tangente est la droite non verticale de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A).

Exercice D2 : Une tangente à l'hyperboleSoit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et $a > 0$.

- Déterminer l'équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a .
- Déterminer les points d'intersection de T_a avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées.
- Montrer que l'aire du triangle formé par T_a et les deux axes ne dépend pas de a .
- Montrer que le point de tangence est le milieu du segment joignant les deux points d'intersection.

Exercice D3 : Tangentes à une parabole issues d'un pointSoit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

- Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$.
- Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{P}$ passant par $A(1; -3)$? Si oui, les déterminer.
- Même question pour $B(1; 2)$. Interpréter géométriquement la différence entre A et B .
- Soit $P(p; q)$ un point quelconque du plan. Discuter, selon le signe de $p^2 - q$, le nombre de tangentes à $\mathcal{P}$ passant par P .

Exercice D4 : Démonstrations : produit, inverse, quotientSoient u et v deux fonctions dérivables en a .

- Vérifier que, pour $h \neq 0$,

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

- En admettant que $u(a+h)$ se rapproche de $u(a)$ quand h se rapproche de 0, en déduire $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
- Retrouver la dérivée de $x \mapsto x^3$ en écrivant $x^3 = x \times x^2$, puis celle de $x \mapsto x^4$ en écrivant $x^4 = x^2 \times x^2$.
- On suppose de plus $v(a) \neq 0$. Pour h non nul et assez petit pour que $v(a+h) \neq 0$, montrer que

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}.$$

En admettant que $v(a+h)$ se rapproche de $v(a)$, en déduire $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$.

- En écrivant $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, déduire la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}$.

Exercice D5 : Raccordement et dérivabilité

Soit a et b deux réels. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$.

1. Pour $h < 0$, exprimer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ et déterminer sa limite quand h se rapproche de 0.
2. Pour $h > 0$, montrer que ce taux vaut $\frac{a + b - 1}{h} + a$.
3. Montrer que, si $a + b \neq 1$, ce taux n'a pas de limite finie quand h se rapproche de 0 par valeurs positives.
4. Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1. Donner alors $f'(1)$ et l'équation de la tangente en 1. Que remarque-t-on pour la courbe sur $]1; +\infty[$?
5. La fonction $g(x) = |x^2 - 1|$ est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement.

Exercice D6 : Tangentes communes à deux paraboles

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 4$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On cherche les droites tangentes à la fois à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$.

1. Donner l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
2. Montrer que la tangente T'_b à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b a pour équation $y = (4 - 2b)x + b^2 - 4$.
3. Une droite est tangente aux deux courbes si et seulement si elle est de la forme T_a et de la forme T'_b . Écrire le système vérifié par a et b , puis le résoudre.
4. En déduire les tangentes communes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les représenter avec les deux courbes.

Exercice D7 : Méthode de la tangente (méthode de Newton)

Soit $f(x) = x^2 - 2$ et, pour $a > 0$, T_a la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

1. Montrer que T_a a pour équation $y = 2ax - a^2 - 2$ et qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\varphi(a) = \frac{a^2 + 2}{2a}$.
2. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions, puis une valeur approchée de u_3 à 10^{-8} près.
3. Montrer que $\varphi(a) > 0$ pour tout $a > 0$ (on admet que tous les termes de la suite sont donc strictement positifs). Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n^2 - 2| < 10^{-10}$. Donner la valeur renvoyée.