

Corrigé : Dérivation**Fiche Défi****D1.**

1. Pour $h \neq 0$: $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$, qui se rapproche de $2a$ quand h se rapproche de 0. **Conclusion** : la fonction carré est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

2. Pour $a \neq 0$ et $h \neq 0$ proche de 0 (de sorte que $a+h \neq 0$) :

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = \frac{-1}{a(a+h)},$$

qui se rapproche de $-\frac{1}{a^2}$. **Conclusion** : $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

3. Pour $h > 0$: $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Ce nombre devient aussi grand que l'on veut quand h se rapproche de 0 : il n'y a pas de limite finie. **Conclusion** : la racine carrée n'est pas dérivable en 0 (sa courbe a une tangente verticale à l'origine).

4. $\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$. Deux valeurs différentes selon le côté : pas de limite.

Conclusion : la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).

5. Avec $X = a+h$ et $Y = a$, on a $X - Y = h$ et, pour $h \neq 0$:

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = (a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \dots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1}.$$

Cette somme comporte n termes. Le terme $(a+h)^{n-k}a^{k-1}$ se rapproche de $a^{n-k}a^{k-1} = a^{n-1}$ quand h se rapproche de 0, et ceci pour chacun des n termes. **Conclusion** : la somme se rapproche de na^{n-1} : $(x^n)'$ en a vaut na^{n-1} .

6. Une droite non verticale de coefficient directeur $m = f'(a)$ a une équation $y = mx + p$. Elle passe par A si et seulement si $f(a) = ma + p$, soit $p = f(a) - ma$. Alors $y = mx + f(a) - ma = f'(a)(x-a) + f(a)$. **Conclusion** : la tangente en A a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

D2.

1. $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ et $f(a) = \frac{1}{a}$, donc $T_a : y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.

2. Avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : $\frac{x}{a^2} = \frac{2}{a}$, soit $x = 2a$: point $P(2a; 0)$. Avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $y = \frac{2}{a}$: point $Q\left(0; \frac{2}{a}\right)$.

3. Le triangle OPQ est rectangle en O : son aire vaut $\frac{1}{2} \times OP \times OQ = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$. **Conclusion** : l'aire vaut 2 quelle que soit a .

4. Le milieu de $[PQ]$ a pour coordonnées $\left(\frac{2a+0}{2}; \frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right) = \left(a; \frac{1}{a}\right)$, qui est le point de tangence.

D3.

1. $f(x) = x^2$, $f'(a) = 2a$: $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.

2. $A(1; -3) \in T_a \iff -3 = 2a - a^2 \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a-3)(a+1) = 0$. **Conclusion** : deux tangentes : $a = -1$, $y = -2x - 1$; $a = 3$, $y = 6x - 9$. Vérification : $-2 - 1 = -3$ et $6 - 9 = -3$.

3. $B(1; 2) \in T_a \iff 2 = 2a - a^2 \iff a^2 - 2a + 2 = 0$, de discriminant $4 - 8 = -4 < 0$. **Conclusion** : aucune tangente ne passe par B . Géométriquement, A est situé sous la parabole ($-3 < 1^2$) : deux tangentes passent par A ; B est situé au-dessus, « à l'intérieur » de la parabole ($2 > 1^2$) : aucune tangente ne passe par B .

4. $P(p; q) \in T_a \iff q = 2ap - a^2 \iff a^2 - 2pa + q = 0$, de discriminant $4p^2 - 4q = 4(p^2 - q)$. **Conclusion** : si $p^2 - q > 0$ (P sous la parabole) : deux tangentes ; si $p^2 - q = 0$ (P sur la parabole) : une seule tangente ; si $p^2 - q < 0$ (P au-dessus) : aucune.

D4.

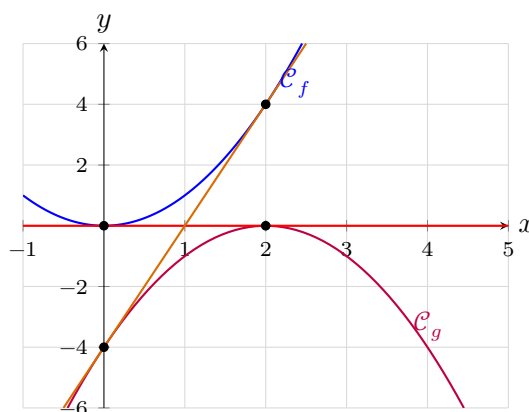
1. On a $u(a+h)[v(a+h)-v(a)] + v(a)[u(a+h)-u(a)] = u(a+h)v(a+h) - u(a+h)v(a) + v(a)u(a+h) - v(a)u(a) = u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)$. Il suffit de diviser par h .
2. Quand h se rapproche de 0 : $u(a+h) \rightarrow u(a)$, $\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \rightarrow v'(a)$ et $\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \rightarrow u'(a)$. Le taux se rapproche de $u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$. **Conclusion :** $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
3. $(x \times x^2)' = 1 \times x^2 + x \times 2x = 3x^2$. $(x^2 \times x^2)' = 2x \times x^2 + x^2 \times 2x = 4x^3$.
4. $\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)} = \frac{v(a) - v(a+h)}{v(a)v(a+h)}$. En divisant par h : $-\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}$. Quand h se rapproche de 0, le premier facteur se rapproche de $-v'(a)$ et $v(a+h)$ de $v(a)$. **Conclusion :** $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$.
5. $\left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (en a , avec $v(a) \neq 0$).

D5.

1. Pour $h < 0$, $1+h < 1$ donc $f(1+h) = (1+h)^2$ et $f(1) = 1$. Le taux vaut $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$, qui se rapproche de 2.
2. Pour $h > 0$, $f(1+h) = a(1+h) + b$ et $f(1) = 1$: le taux vaut $\frac{a + ah + b - 1}{h} = \frac{a + b - 1}{h} + a$.
3. Si $c = a + b - 1 \neq 0$, alors $\frac{c}{h}$ devient aussi grand que l'on veut en valeur absolue quand $h > 0$ se rapproche de 0 : le taux n'a pas de limite finie. Dans ce cas f n'est pas dérivable en 1.
4. Pour que f soit dérivable en 1, il faut $a + b = 1$ (question 3), puis que les deux limites coïncident : $a = 2$. Alors $b = -1$. Réciproquement, avec $a = 2$ et $b = -1$, le taux vaut 2 pour $h > 0$ et $2 + h$ pour $h < 0$: f est dérivable en 1. **Conclusion :** $a = 2$, $b = -1$, $f'(1) = 2$ et la tangente en 1 est $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$. Sur $]1; +\infty[$, la courbe est la droite $y = 2x - 1$: elle coïncide avec sa tangente en 1 (raccord de la parabole et de sa tangente).
5. $g(1) = 0$. Pour $h < 0$ proche de 0, $(1+h)^2 < 1$ donc $g(1+h) = 1 - (1+h)^2$ et le taux vaut $\frac{-2h - h^2}{h} = -2 - h \rightarrow -2$. Pour $h > 0$, $g(1+h) = (1+h)^2 - 1$ et le taux vaut $2 + h \rightarrow 2$. **Conclusion :** les limites à gauche et à droite sont différentes (-2 et 2) : g n'est pas dérivable en 1. La courbe présente un point anguleux en $(1; 0)$, avec deux demi-tangentes de pentes -2 et 2 .

D6.

1. $f'(a) = 2a$, $f(a) = a^2$: $T_a : y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.
2. $g'(x) = -2x + 4$ et $g(b) = -b^2 + 4b - 4$. $T'_b : y = (4-2b)(x-b) - b^2 + 4b - 4 = (4-2b)x - 4b + 2b^2 - b^2 + 4b - 4 = (4-2b)x + b^2 - 4$.
3. Deux droites non verticales sont égales si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine : $\begin{cases} 2a = 4 - 2b \\ -a^2 = b^2 - 4 \end{cases}$. La première équation donne $a = 2 - b$. En remplaçant : $-(2-b)^2 = b^2 - 4 \iff -4 + 4b - b^2 = b^2 - 4 \iff 2b^2 - 4b = 0 \iff 2b(b-2) = 0$. Donc $b = 0$ (alors $a = 2$) ou $b = 2$ (alors $a = 0$).
4. **Conclusion :** il y a deux tangentes communes : la droite $y = 4x - 4$ (tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 2$ et à $\mathcal{C}_g$ en $x = 0$) et la droite $y = 0$ (tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ et à $\mathcal{C}_g$ en $x = 2$). Vérification : $g(0) = -4$, $g'(0) = 4$; $g(2) = 0$, $g'(2) = 0$.

**D7.**

1. $f'(x) = 2x$, $f(a) = a^2 - 2$: $T_a : y = 2a(x - a) + a^2 - 2 = 2ax - a^2 - 2$. Elle coupe l'axe des abscisses si $2ax - a^2 - 2 = 0$, soit $x = \frac{a^2 + 2}{2a}$ (car $a > 0$) : $\varphi(a) = \frac{a^2 + 2}{2a}$.
2. $u_1 = \frac{4+2}{4} = \frac{3}{2}$. $u_2 = \frac{\frac{9}{4}+2}{3} = \frac{17}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$. $u_3 = \frac{\frac{289}{144}+2}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{144} \times \frac{6}{17} = \frac{577}{408} \approx 1,41421569$. (À comparer à $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.)
3. Pour $a > 0$, $\varphi(a) = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} > 0$: un terme strictement positif a toujours un successeur strictement positif, et $u_0 = 2 > 0$. Tous les termes de la suite sont donc strictement positifs. Ensuite :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

Comme $u_n > 0$, ce nombre est positif ou nul : $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout n , c'est-à-dire $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$.

4. Programme :

```
def u(n):
    x = 2
    for _ in range(n):
        x = (x ** 2 + 2) / (2 * x)
    return x
```

```
n = 0
while abs(u(n) ** 2 - 2) >= 1e-10:
    n = n + 1
print(n)
```

Le programme renvoie 4 : en effet $u_3^2 - 2 = \frac{1}{166464} \approx 6 \times 10^{-6}$ et $u_4 = \frac{665857}{470832}$ vérifie $u_4^2 - 2 = \frac{1}{470832^2} \approx 4,5 \times 10^{-12} < 10^{-10}$.