

Corrigé : Dérivation

Fiche Bases

B1.

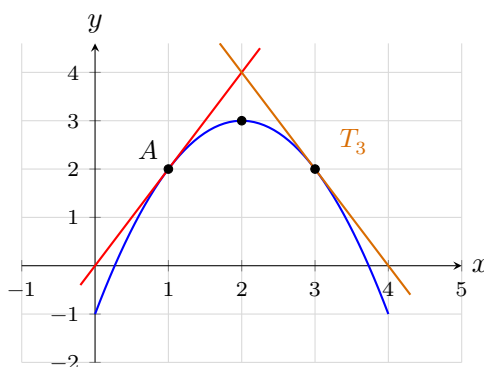
1. $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f(3) = 9 - 9 = 0$. Le taux de variation entre 1 et 3 est $\frac{0 - (-2)}{3 - 1} = 1$.
2. $f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = -2 + h + h^2$ et $f(2) = 4 - 6 = -2$. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h + h^2}{h} = 1 + h.$$

3. Quand h se rapproche de 0, $1+h$ se rapproche de 1. **Conclusion** : f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.
4. $g(1) = 2 - 1 = 1$ et $g(1+h) = 2(1+h)^2 - (1+h) = 1 + 3h + 2h^2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\frac{3h + 2h^2}{h} = 3 + 2h$, qui se rapproche de 3. **Conclusion** : $g'(1) = 3$.

B2.

1. A est sur la courbe donc $f(1) = 2$. La droite T passe par $O(0; 0)$ et $A(1; 2)$: son coefficient directeur est $\frac{2-0}{1-0} = 2$. **Conclusion** : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 2$.
2. Au sommet $S(2; 3)$ la tangente est horizontale, d'équation $y = 3$. **Conclusion** : $f'(2) = 0$.
3. La tangente en $x = 3$ a pour coefficient directeur -2 et passe par $(3; 2)$: $y = -2(x-3) + 2 = -2x + 8$. Elle passe aussi par $(4; 0)$, ce qui permet de la tracer (figure ci-dessous).
4. $f(1) = -1 + 4 - 1 = 2$ et $f'(1) = -2 + 4 = 2$. $f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$ et $f'(2) = 0$. $f(3) = -9 + 12 - 1 = 2$ et $f'(3) = -6 + 4 = -2$. Tout est cohérent avec les lectures précédentes, et la tangente en 3 est bien $y = -2(x-3) + 2 = -2x + 8$.



B3.

1. $f'_1(x) = 6x - 5$.
2. $f'_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
3. Sur $]0; +\infty[$ (ou sur $] -\infty; 0[$) : $f'_3(x) = 5x^4 - \frac{4}{x^2}$.
4. Sur $]0; +\infty[$: $f'_4(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.
5. $f'_5(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 - 3x^2 = 2x^3 - 3x^2$.

B4.

1. $f'(x) = 2x - 2$. En $a = 2$: $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$, donc $y = 2(x-2) + 3 = 2x - 1$. En $a = 0$: $f(0) = 3$, $f'(0) = -2$, donc $y = -2x + 3$.
2. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. En $a = 1$: $g(1) = 1$, $g'(1) = -1$, donc $y = -(x-1) + 1 = -x + 2$. En $a = 2$: $g(2) = \frac{1}{2}$, $g'(2) = -\frac{1}{4}$, donc $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1$.

B5.

1. Vitesse moyenne : $\frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$ m/s. Comme $d'(t) = 2t$, la vitesse instantanée à $t = 2$ est $d'(2) = 4$ m/s.
2. $C(20) = 0,5 \times 400 + 200 + 200 = 600$ et $C(21) = 0,5 \times 441 + 210 + 200 = 630,5$, donc $C(21) - C(20) = 30,5$ €. Comme $C'(q) = q + 10$, $C'(20) = 30$. **Conclusion** : le coût marginal de 30 € approche le coût de fabrication du 21^e article (30,5 €).

B6.

1. $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$. Avec $h = 0,02$: $3,02^2 \approx 9 + 6 \times 0,02 = 9,12$. Valeur exacte : 9,1204, soit un écart de 4×10^{-4} .
2. $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$. Avec $h = 0,04$: $\frac{1}{2,04} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 0,04 = 0,49$ (valeur exacte $\approx 0,4902$).
3. $f(9) = 3$ et $f'(9) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$. Avec $h = 0,09$: $\sqrt{9,09} \approx 3 + \frac{0,09}{6} = 3,015$ (valeur exacte $\approx 3,01496$).

B7.

1. $f'(x) = 4x^3$.
2. Avec $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$: $g'(x) = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2}{x^3}$ sur $] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$.
3. Avec $v(x) = x^3$, $v'(x) = 3x^2$: $h'(x) = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$ sur $] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$.
4. $k'(x) = 21x^6 + \frac{2}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$ ou $] -\infty ; 0[$.
5. Sur $]0 ; +\infty[$: $m'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
6. Avec $v(x) = 2x + 1$, $v'(x) = 2$: $p'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$ sur $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$ (ou sur $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$).

B8.

1. Pour $h = 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2$: $\frac{2,25 - 1}{0,5} = 2,5$; $\frac{4 - 1}{1} = 3$; $\frac{6,25 - 1}{1,5} = 3,5$; $\frac{9 - 1}{2} = 4$. **Conclusion** : la liste renvoyée est $[2.5, 3.0, 3.5, 4.0]$.
2. $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$. Quand le pas diminue, h se rapproche de 0 et les coefficients directeurs se rapprochent de 2. **Conclusion** : $f'(1) = 2$.

B9.

1. **Faux.** $(uv)' \neq u'v'$. Avec $u = x^2 + 1$ et $v = 3x - 2$: $f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 9x^2 - 4x + 3$.
2. **Faux.** $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$, donc $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$. L'énoncé oublie le terme $f(a)$: la droite proposée n'est pas la tangente (elle ne passe pas par le point $(3; 9)$).
3. **Vrai.** Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a) = 0$: la tangente est horizontale, d'équation $y = f(a)$.
4. **Faux.** Pour $h > 0$, $\frac{|h| - 0}{h} = 1$ et pour $h < 0$, $\frac{|h| - 0}{h} = -1$: le taux n'a pas de limite en 0.
5. **Faux.** Là encore $(uv)' \neq u'v'$. Avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^3$: $f'(x) = 2x \times x^3 + x^2 \times 3x^2 = 5x^4$. On retrouve ce résultat avec $f(x) = x^5$.
6. **Faux.** La fonction inverse n'est pas définie en 0 : elle est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, pas sur $\mathbb{R}$.
7. **Vrai.** $f'(a)$ est le nombre dérivé en a ; f' est la fonction qui à x associe $f'(x)$.

B10.

1. $u(x) = x + 1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = x^2 - 3$, $v'(x) = 2x$. $f'(x) = u'v + uv' = x^2 - 3 + (x + 1) \times 2x = 3x^2 + 2x - 3$.
2. $u(x) = 3x + 2$, $u'(x) = 3$, $v(x) = x - 1$, $v'(x) = 1$. $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3(x - 1) - (3x + 2)}{(x - 1)^2} =$

$$\frac{-5}{(x-1)^2}.$$

3. $h = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 1$ (qui ne s'annule pas), $v'(x) = 2x$: $h'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

4. $u(x) = 4x - 1$, $u'(x) = 4$, $v(x) = x^2 + 2$, $v'(x) = 2x$: $k'(x) = 4(x^2 + 2) + (4x - 1) \times 2x = 12x^2 - 2x + 8$.

5. $u(x) = x + 1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $m'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}}$.

6. $p = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = x^3 + 1$ (qui ne s'annule pas sur $] -1 ; +\infty[$), $v'(x) = 3x^2$: $p'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$.