

Fiche 3 : dérivées et tangentes, problèmes

Six exercices pour résoudre les problèmes de tangentes :

- tangente et tangentes horizontales d'une fonction polynôme ;
- tangente **parallèle** à une droite donnée ;
- position relative d'une courbe et de sa tangente ;
- problèmes de vitesse et de coût marginal ;
- détermination de coefficients ;
- dérivabilité en 0 de la racine carrée et de la valeur absolue.

Un septième exercice, **hors programme**, est placé en fin de fiche pour aller plus loin : les tangentes issues d'un point extérieur à la courbe.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'**abscisse du point de contact** est nommée (a) quand elle est inconnue ;
- la condition de l'énoncé est **traduite en équation** sur a ;
- les solutions sont **vérifiées** ;
- la conclusion donne les **équations** demandées, avec l'unité pour un problème concret.

Le modèle de rédaction d'une tangente parallèle à une droite

« La droite d a pour coefficient directeur m_d .

La tangente en a est parallèle à d si et seulement si $f'(a) = m_d$.

On résout cette équation d'inconnue a , puis on écrit l'équation de la tangente en trois temps : $f(a)$, $f'(a)$, équation. »

- **Compare** avec le **coefficient directeur** de d , pas avec son ordonnée à l'origine.
- **Résous**, puis écris **toutes** les tangentes trouvées : il peut y avoir plusieurs points.
- **Vérifie** ta solution en recalculant la pente.

Les pièges classiques

- Comparer $f'(a)$ avec l'**ordonnée à l'origine** de la droite au lieu de son coefficient directeur.
- S'arrêter à **une** solution alors que l'équation $f'(a) = m$ en a plusieurs.
- Étudier la position relative **sans factoriser** la différence : le signe devient illisible.
- Oublier d'écrire l'**unité** dans une phrase de conclusion (m/s, euros).

Oublier l'unité, c'est répondre « 30 » à « combien ça coûte ? » : le correcteur te demandera « 30 quoi ? ».

Exercice 1 (★★) : une cubique et ses tangentes

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale, et les équations de ces tangentes.

Exercice 2 (★★) : tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et d la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Déterminer l'abscisse du point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à d .
2. Donner l'équation de cette tangente.

Exercice 3 (★★★) : position d'une courbe par rapport à sa tangente

Dans chaque cas, on étudie la position d'une courbe par rapport à sa tangente.

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déterminer T , puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
2. Soit $g(x) = x^3$ et T' la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1. Déterminer T' , vérifier que $g(x) - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de T' .

Exercice 4 (★★) : vitesse et coût marginal

Partie A. Un ballon est lancé verticalement.

Sa hauteur, en mètres, à l'instant t (en secondes, avec $0 \leq t \leq 4$) est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1,5$.

La **vitesse instantanée** à l'instant t est le nombre dérivé $h'(t)$, en m/s.

1. Calculer $h'(t)$.
2. Calculer la vitesse du ballon aux instants $t = 1$ et $t = 3$, et interpréter les signes.
3. À quel instant la vitesse est-elle nulle ? Quelle est alors la hauteur du ballon ?

Partie B. Le coût de fabrication, en euros, de q objets est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$.

4. Calculer $C'(20)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer $C(21) - C(20)$ et comparer avec $C'(20)$.

Exercice 5 (★★★) : déterminer des coefficients

On cherche une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $A(0;1)$ et $B(1;4)$ et telle que la tangente en B ait pour coefficient directeur 5.

1. Traduire les trois conditions par trois équations.
2. Déterminer a , b et c .
3. Donner l'équation de la tangente en B .

Exercice 6 (★★★) : dérivabilité en 0

1. Pour $h > 0$, calculer le taux de variation de $f(x) = \sqrt{x}$ entre 0 et h . Que se passe-t-il quand h tend vers 0 ? Interpréter graphiquement.
2. Pour $g(x) = |x|$, calculer le taux de variation entre 0 et h pour $h > 0$ puis pour $h < 0$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

Pour aller plus loin, hors programme

L'exercice ci-dessous dépasse les capacités attendues en Première : le programme demande l'équation de la tangente en un point **donné**. Il n'apparaît ni dans le QCM ni dans la liste de ce qui peut tomber en contrôle.

Exercice 7 (★★★) : tangentes issues d'un point

Le point $P(1; -3)$ n'appartient pas à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Soit a un réel. Écrire l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
2. Pour quelles valeurs de a la tangente T_a passe-t-elle par P ?
3. En déduire les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ qui passent par P .

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Tangentes horizontales** et tangente en un point donné (exercice 1).
- Tangente **parallèle à une droite** (exercice 2).
- **Position relative** d'une courbe et de sa tangente (exercice 3).
- Un **problème concret** avec interprétation et unité (exercice 4), ou des **coefficients à déterminer** (exercice 5).
- Une fonction **dérivable ou non** en 0 (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse **2** a pour équation :
 - A. $y = 2x$
 - B. $y = 4x$
 - C. $y = 4x + 4$
 - D. $y = 4x - 4$
2. Pour $f(x) = x^3 - 3x$, les tangentes horizontales sont aux points d'abscisse :
 - A. **-1 et 1**
 - B. 0 seulement
 - C. -3 et 3
 - D. 3 seulement
3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse **a** est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$ si :
 - A. $f(a) = 3$
 - B. $f'(a) = 5$
 - C. $f'(a) = 3$
 - D. $f(a) = 3a + 5$
4. Un ballon a pour hauteur $h(t) = -5t^2 + 20t$ (en mètres, t en secondes). Sa vitesse à $t = 1$ est :
 - A. 15 m/s
 - B. 10 m/s
 - C. 20 m/s
 - D. -10 m/s
5. Le coût de fabrication de q objets est $C(q) = q^2 + 4q$. Le coût marginal $C'(10)$ vaut :
 - A. 14
 - B. 24
 - C. 140
 - D. 104