

Fiche 3 : dérivées et tangentes, problèmes

Six exercices pour résoudre les problèmes de tangentes :

- tangente et tangentes horizontales d'une fonction polynôme ;
- tangente **parallèle** à une droite donnée ;
- position relative d'une courbe et de sa tangente ;
- problèmes de vitesse et de coût marginal ;
- détermination de coefficients ;
- dérivabilité en 0 de la racine carrée et de la valeur absolue.

Un septième exercice, **hors programme**, est placé en fin de fiche pour aller plus loin : les tangentes issues d'un point extérieur à la courbe.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'**abscisse du point de contact** est nommée (a) quand elle est inconnue ;
- la condition de l'énoncé est **traduite en équation** sur a ;
- les solutions sont **vérifiées** ;
- la conclusion donne les **équations** demandées, avec l'unité pour un problème concret.

Le modèle de rédaction d'une tangente parallèle à une droite

« La droite d a pour coefficient directeur m_d .

La tangente en a est parallèle à d si et seulement si $f'(a) = m_d$.

On résout cette équation d'inconnue a , puis on écrit l'équation de la tangente en trois temps : $f(a)$, $f'(a)$, équation. »

- **Compare** avec le **coefficient directeur** de d , pas avec son ordonnée à l'origine.
- **Résous**, puis écris **toutes** les tangentes trouvées : il peut y avoir plusieurs points.
- **Vérifie** ta solution en recalculant la pente.

Les pièges classiques

- Comparer $f'(a)$ avec l'**ordonnée à l'origine** de la droite au lieu de son coefficient directeur.
- S'arrêter à **une** solution alors que l'équation $f'(a) = m$ en a plusieurs.
- Étudier la position relative **sans factoriser** la différence : le signe devient illisible.
- Oublier d'écrire l'**unité** dans une phrase de conclusion (m/s, euros).

Oublier l'unité, c'est répondre « 30 » à « combien ça coûte ? » : le correcteur te demandera « 30 quoi ? ».

Exercice 1 (★★) : une cubique et ses tangentes

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale, et les équations de ces tangentes.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$f'(x) = 3x(x - 2)$$

Question 2

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \text{ et } f'(1) = 3 \times 1 \times (1 - 2) = -3.$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -3(x - 1) + 0$$

T a pour équation $y = -3x + 3$.

Question 3

La tangente est horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $3x(x - 2) = 0 : x = 0$ ou $x = 2$.

$$f(0) = 2 \text{ et } f(2) = 8 - 12 + 2 = -2.$$

Au point $(0; 2)$, la tangente a pour équation $y = 2$; au point $(2; -2)$, elle a pour équation $y = -2$.

Exercice 2 (★★) : tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et d la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Déterminer l'abscisse du point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à d .
2. Donner l'équation de cette tangente.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Celui de d est 2.

$$f'(x) = 2x - 4, \text{ donc } f'(x) = 2 \iff 2x - 4 = 2 \iff x = 3.$$

La tangente est parallèle à d au point d'abscisse 3.

Question 2

$$f(3) = 9 - 12 + 5 = 2 \text{ et } f'(3) = 2.$$

$$y = 2(x - 3) + 2$$

La tangente a pour équation $y = 2x - 4$.

Les deux droites ont la même pente mais pas la même ordonnée à l'origine ($-4 \neq 1$) : elles sont parallèles et distinctes.

Exercice 3 (★★★) : position d'une courbe par rapport à sa tangente

Dans chaque cas, on étudie la position d'une courbe par rapport à sa tangente.

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déterminer T , puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
2. Soit $g(x) = x^3$ et T' la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1. Déterminer T' , vérifier que $g(x) - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de T' .

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$f(2) = 4 - 4 + 3 = 3 \text{ et } f'(x) = 2x - 2, \text{ donc } f'(2) = 2.$$

$$T : y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1.$$

$$T : y = 2x - 1$$

Pour étudier la position, on étudie le signe de $f(x) - (2x - 1)$:

$$f(x) - (2x - 1) = x^2 - 2x + 3 - 2x + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Un carré est positif ou nul, et nul seulement pour $x = 2$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T , avec un seul point commun : le point d'abscisse 2.

Question 2

$$g(1) = 1 \text{ et } g'(x) = 3x^2, \text{ donc } g'(1) = 3.$$

$$T' : y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2.$$

$$T' : y = 3x - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Vérification : } (x - 1)^2(x + 2) &= (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2 \\ &= g(x) - (3x - 2). \end{aligned}$$

Le facteur $(x - 1)^2$ est positif ou nul : le signe de $g(x) - (3x - 2)$ est celui de $x + 2$, sauf en $x = 1$ où il s'annule.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$g(x) - (3x - 2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\mathcal{C}_g$ est au-dessus de T' sur $[-2; +\infty[$ et en dessous sur $] -\infty; -2]$: la tangente T' recoupe la courbe au point d'abscisse -2 .

Exercice 4 (★★) : vitesse et coût marginal

Partie A. Un ballon est lancé verticalement.

Sa hauteur, en mètres, à l'instant t (en secondes, avec $0 \leq t \leq 4$) est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1,5$.

La **vitesse instantanée** à l'instant t est le nombre dérivé $h'(t)$, en m/s.

1. Calculer $h'(t)$.
2. Calculer la vitesse du ballon aux instants $t = 1$ et $t = 3$, et interpréter les signes.
3. À quel instant la vitesse est-elle nulle ? Quelle est alors la hauteur du ballon ?

Partie B. Le coût de fabrication, en euros, de q objets est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$.

4. Calculer $C'(20)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer $C(21) - C(20)$ et comparer avec $C'(20)$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

h est un polynôme : $h'(t) = -10t + 20$.

$$h'(t) = -10t + 20$$

Question 2

$$h'(1) = -10 + 20 = 10 \text{ et } h'(3) = -30 + 20 = -10.$$

À $t = 1$ s, le ballon monte à 10 m/s. À $t = 3$ s, il descend à 10 m/s (une vitesse négative signifie que la hauteur diminue).

Question 3

$$h'(t) = 0 \iff -10t + 20 = 0 \iff t = 2.$$

$h'(t) > 0$ pour $t < 2$ (le ballon monte) et $h'(t) < 0$ pour $t > 2$ (il descend).

$$h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1,5 = 21,5.$$

À $t = 2$ s, la vitesse est nulle : le ballon est à son point le plus haut, à 21,5 m.

Question 4

$$C'(q) = q + 10, \text{ donc } C'(20) = 30.$$

Fabriquer le 21^e objet coûte environ 30 €.

Question 5

$$C(21) = 0,5 \times 441 + 210 + 200 = 630,5 \text{ et } C(20) = 0,5 \times 400 + 200 + 200 = 600.$$

$$C(21) - C(20) = 30,5.$$

Le coût réel du 21^e objet est 30,5 € : $C'(20) = 30$ en est une très bonne approximation (écart de 0,5 €).

Exercice 5 (★★★) : déterminer des coefficients

On cherche une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $A(0; 1)$ et $B(1; 4)$ et telle que la tangente en B ait pour coefficient directeur 5.

1. Traduire les trois conditions par trois équations.
2. Déterminer a , b et c .
3. Donner l'équation de la tangente en B .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$A \in \mathcal{C}_f : f(0) = 1, \text{ donc } c = 1.$$

$$B \in \mathcal{C}_f : f(1) = 4, \text{ donc } a + b + c = 4.$$

$$\text{Comme } f'(x) = 2ax + b, \text{ la pente de la tangente en } B \text{ est } f'(1) = 2a + b = 5.$$

$$c = 1, a + b + c = 4 \text{ et } 2a + b = 5$$

Question 2

$$\text{Avec } c = 1, \text{ la deuxième équation devient } a + b = 3.$$

$$\text{On soustrait : } (2a + b) - (a + b) = 5 - 3, \text{ donc } a = 2, \text{ puis } b = 3 - 2 = 1.$$

$$f(x) = 2x^2 + x + 1$$

$$\text{Vérification : } f(0) = 1, f(1) = 4, f'(1) = 4 + 1 = 5.$$

Question 3

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 5(x - 1) + 4$$

La tangente en B a pour équation $y = 5x - 1$.

Exercice 6 (★★★) : dérivabilité en 0

1. Pour $h > 0$, calculer le taux de variation de $f(x) = \sqrt{x}$ entre 0 et h . Que se passe-t-il quand h tend vers 0 ? Interpréter graphiquement.
2. Pour $g(x) = |x|$, calculer le taux de variation entre 0 et h pour $h > 0$ puis pour $h < 0$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Pour $h = 0,1 ; 0,01 ; 0,001$ on trouve environ 3,2 ; 10 ; 31,6 : le taux **grandit sans limite**.

f n'est **pas dérivable en 0** : la courbe a une tangente **verticale** à l'origine.

Question 2

Pour $h > 0$: $\frac{|h|}{h} = 1$. Pour $h < 0$: $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$.

Les deux taux ont des limites **différentes** (1 à droite, -1 à gauche).

g n'est **pas dérivable en 0** : la courbe présente un **point anguleux**.

Pour aller plus loin, hors programme

L'exercice ci-dessous dépasse les capacités attendues en Première : le programme demande l'équation de la tangente en un point **donné**. Il n'apparaît ni dans le QCM ni dans la liste de ce qui peut tomber en contrôle.

Exercice 7 (★★★) : tangentes issues d'un point

Le point $P(1; -3)$ n'appartient pas à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Soit a un réel. Écrire l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
2. Pour quelles valeurs de a la tangente T_a passe-t-elle par P ?
3. En déduire les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ qui passent par P .

Correction de l'exercice 7

Question 1

Pour $f(x) = x^2$: $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$.

$$T_a : y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2$$

$$T_a : y = 2ax - a^2$$

Question 2

T_a passe par $P(1; -3)$ si et seulement si $-3 = 2a \times 1 - a^2$, c'est-à-dire $a^2 - 2a - 3 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc $a = \frac{2 - 4}{2} = -1$ ou $a = \frac{2 + 4}{2} = 3$.

T_a passe par P pour $a = -1$ et pour $a = 3$.

Question 3

Pour $a = 3$: $y = 6x - 9$. Pour $a = -1$: $y = -2x - 1$.

Vérification : $6 \times 1 - 9 = -3$ et $-2 \times 1 - 1 = -3$.

Il y a deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par P : $y = 6x - 9$ et $y = -2x - 1$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Tangentes horizontales** et tangente en un point donné (exercice 1).
- Tangente **parallèle à une droite** (exercice 2).
- **Position relative** d'une courbe et de sa tangente (exercice 3).
- Un **problème concret** avec interprétation et unité (exercice 4), ou des **coefficients à déterminer** (exercice 5).
- Une fonction **dérivable ou non** en 0 (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

- A. $y = 2x$
- B. $y = 4x$
- C. $y = 4x + 4$
- D. $y = 4x - 4$ (**bonne réponse**)

Justification : $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$: $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

2. Pour $f(x) = x^3 - 3x$, les tangentes horizontales sont aux points d'abscisse :

- A. -1 et 1 (**bonne réponse**)
- B. 0 seulement
- C. -3 et 3
- D. 3 seulement

Justification : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, qui s'annule en -1 et en 1 .

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$ si :

- A. $f(a) = 3$
- B. $f'(a) = 5$
- C. $f'(a) = 3$ (**bonne réponse**)
- D. $f(a) = 3a + 5$

Justification : Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur : $f'(a) = 3$.

4. Un ballon a pour hauteur $h(t) = -5t^2 + 20t$ (en mètres, t en secondes). Sa vitesse à $t = 1$ est :

- A. 15 m/s
- B. 10 m/s (**bonne réponse**)
- C. 20 m/s
- D. -10 m/s

Justification : $h'(t) = -10t + 20$, donc $h'(1) = 10$ m/s.

5. Le coût de fabrication de q objets est $C(q) = q^2 + 4q$. Le coût marginal $C'(10)$ vaut :

- A. 14
- B. 24 (**bonne réponse**)
- C. 140
- D. 104

Justification : $C'(q) = 2q + 4$, donc $C'(10) = 24$: le 11^e objet coûte environ 24 €.