

Fiche 2 : fonctions dérivées

Sept exercices pour maîtriser les formules de dérivation :

- dérivées de polynômes et de sommes ;
- dérivée d'un produit ;
- dérivée d'un quotient et d'un inverse ;
- dérivées avec des fonctions affines : **développer** ou utiliser la formule de l'**inverse** ;
- dérivées à **factoriser** (pour préparer l'étude du signe) ;
- vrai/faux ;
- puissances d'exposant négatif et variations.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- les fonctions u , v et leurs dérivées u' , v' sont **écrites** avant d'appliquer la formule ;
- la formule utilisée est **citée** ;
- le résultat est **simplifié**, et **factorisé** quand c'est utile ;
- l'**ensemble de dérivabilité** est précisé quand la fonction n'est pas définie partout.

Le modèle de rédaction d'un produit

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. On pose $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x^2 + x + 1$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x + 1$. Alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(x^2 + x + 1) + (2x - 3)(2x + 1) = 6x^2 - 2x - 1$. »

- **Écris** u , u' , v , v' **chacun sur sa ligne** : c'est là que se jouent les erreurs.
- **Cite** la formule, puis remplace.
- **Simplifie** en développant, ou factorise si on te demande le signe.

Les pièges classiques

- $(uv)' \neq u'v'$: un produit se dérive en **deux termes**.
- Dans un quotient, le numérateur est $u'v - uv'$ **dans cet ordre**, et le dénominateur est v^2 .
- Pour un carré comme $(3x + 2)^2$, ne dérive pas « comme x^2 » : développe d'abord. On trouve $18x + 12 = 6(3x + 2)$, pas $2(3x + 2)$.
- Laisser une dérivée **non simplifiée** : on ne voit plus son signe.

Une dérivée qu'on ne factorise pas, c'est un cadeau qu'on ne déballe pas : on ne sait pas ce qu'il y a dedans.

Exercice 1 (★) : dérivées de sommes

Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = x^3 + 4x^2 - x$ sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = -2x^4 + \frac{x}{2} - 9$ sur $\mathbb{R}$.

4. $p(x) = 3x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

On dérive terme à terme : $(3x^2)' = 6x$, $(-5x)' = -5$, $(7)' = 0$.

$$f'(x) = 6x - 5$$

Question 2

$(x^3)' = 3x^2$, $(4x^2)' = 8x$, $(-x)' = -1$.

$$g'(x) = 3x^2 + 8x - 1$$

Question 3

$(-2x^4)' = -8x^3$, $\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$, $(-9)' = 0$.

$$h'(x) = -8x^3 + \frac{1}{2}$$

Question 4

$(3x)' = 3$ et $\left(\frac{4}{x}\right)' = 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2}$.

$$p'(x) = 3 - \frac{4}{x^2}$$

Exercice 2 (★★) : dérivées de produits

Dériver chaque fonction produit sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

3. $h(x) = (3x^2 - 1)(x^3 + 2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$u(x) = 2x - 3, u'(x) = 2 ; v(x) = x^2 + x + 1, v'(x) = 2x + 1.$$

$$f'(x) = 2(x^2 + x + 1) + (2x - 3)(2x + 1)$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2x + 2 + 4x^2 + 2x - 6x - 3$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 1$$

Question 2

$$u(x) = 2x - 1, u'(x) = 2 ; v(x) = \sqrt{x}, v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$g'(x) = 2\sqrt{x} + (2x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{6x - 1}{2\sqrt{x}}$$

Question 3

$$u(x) = 3x^2 - 1, u'(x) = 6x ; v(x) = x^3 + 2x, v'(x) = 3x^2 + 2.$$

$$h'(x) = 6x(x^3 + 2x) + (3x^2 - 1)(3x^2 + 2)$$

$$h'(x) = 6x^4 + 12x^2 + 9x^4 + 6x^2 - 3x^2 - 2$$

$$h'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 2$$

Vérification en développant d'abord : $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 2x$, donc $h'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 2$.

Exercice 3 (★★) : dérivées de quotients

Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ sur $] -2 ; +\infty[$.

2. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

4. $k(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ sur $]1 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$u(x) = 3x - 1, u'(x) = 3 ; v(x) = x + 2, v'(x) = 1.$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$$

Question 2

$$u(x) = x^2 - 1, u'(x) = 2x ; v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x.$$

$$g'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Question 3

On utilise $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$, et le facteur **3** :

$$h'(x) = 3 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$h'(x) = -\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

Question 4

$$u(x) = x^2, u'(x) = 2x ; v(x) = x - 1, v'(x) = 1.$$

$$k'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Exercice 4 (★★) : dérivées avec des fonctions affines

Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué. On pourra développer d'abord, ou utiliser la formule de l'inverse.

1. $f(x) = (3x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = (2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = \frac{1}{4x-1}$ sur $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

4. $k(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ sur $]2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

On développe : $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$.

$$f'(x) = 18x - 6 = 6(3x - 1).$$

Vérification avec un produit : $u = v = 3x - 1$ donne $u'v + uv' = 3(3x - 1) + 3(3x - 1) = 6(3x - 1)$.

Question 2

$$(2x + 1)^3 = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$$

$$g'(x) = 24x^2 + 24x + 6 = 6(2x + 1)^2.$$

Question 3

$$h = \frac{1}{v} \text{ avec } v(x) = 4x - 1 \text{ et } v'(x) = 4 ; v \text{ ne s'annule pas sur l'intervalle. } h'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}.$$

$$h'(x) = -\frac{4}{(4x - 1)^2}.$$

Question 4

$k = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ et $v'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$; v ne s'annule pas sur $]2; +\infty[$.

$$k'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{2(x - 2)}{(x - 2)^4}$$

$$k'(x) = -\frac{2}{(x - 2)^3}.$$

(On retrouve le résultat en écrivant $k(x) = (x - 2)^{-2}$ et en dérivant comme une puissance : le facteur -2 apparaît.)

Exercice 5 (★★) : dériver puis factoriser

Pour chaque fonction, calculer la dérivée, la **factoriser** au maximum, puis résoudre $f'(x) = 0$.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ a pour racines 1 et 3 (car $1 + 3 = 4$ et $1 \times 3 = 3$), donc $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Question 2

$$g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racines -1 et 2 (car $-1 + 2 = 1$ et $-1 \times 2 = -2$), donc $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

$$g'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$$

$$g'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

Question 3

$$u(x) = x, u'(x) = 1; v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x.$$

$$h'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif : $h'(x) = 0$ équivaut à $(1 - x)(1 + x) = 0$.

$$h'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. La dérivée de $f(x) = (3x + 2)^2$ est $f'(x) = 2(3x + 2)$.
2. La dérivée de $f(x) = x(x + 1)$ est $f'(x) = 2x + 1$.
3. La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.
4. La dérivée d'une fonction polynôme de degré 3 est une fonction polynôme de degré 2.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

On développe : $f(x) = 9x^2 + 12x + 4$, donc $f'(x) = 18x + 12 = 6(3x + 2)$.

(Avec un produit : $f(x) = (3x + 2)(3x + 2)$ donne $f'(x) = 3(3x + 2) + (3x + 2) \times 3 = 6(3x + 2)$.)

L'expression $2(3x + 2) = 6x + 4$ n'est donc pas la dérivée.

Faux.

Affirmation 2

Par produit : $f'(x) = 1 \times (x + 1) + x \times 1 = 2x + 1$. (Ou : $f(x) = x^2 + x$.)

Vrai.

Affirmation 3

La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$: il manque le signe moins.

Faux.

Affirmation 4

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ avec $3a \neq 0$: c'est un polynôme de degré 2.

Vrai.

Exercice 7 (★★) : puissances négatives

Calculer la dérivée de chaque fonction sur $\mathbb{R}^*$:

- $f(x) = \frac{1}{x^3}$;
- $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$;
- $h(x) = x^2 + \frac{5}{x^4}$.
- Étudier le signe de g' et en déduire les variations de g .

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$f(x) = x^{-3}, \text{ donc } f'(x) = -3x^{-4}.$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}.$$

Question 2

$$g(x) = x^{-2} + 2x, \text{ donc } g'(x) = -2x^{-3} + 2.$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2.$$

Question 3

$$h(x) = x^2 + 5x^{-4}, \text{ donc } h'(x) = 2x + 5 \times (-4)x^{-5}.$$

$$h'(x) = 2x - \frac{20}{x^5}.$$

Question 4

On met au même dénominateur et on factorise :

$$g'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il est strictement positif. Comme x^3 a le signe de x , $g'(x)$ a le signe de $(x-1)x$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	0	+	
g		↗		↘	3	↗	

g est croissante sur $] -\infty ; 0[$, décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$; elle a un minimum local $g(1) = 3$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Dériver** un polynôme, un produit, un quotient (exercices 1 à 3).
- **Dériver** un inverse, ou développer avant de dériver quand les fonctions sont affines (exercice 4).
- **Factoriser** la dérivée pour en étudier le signe (exercice 5).
- Un **vrai/faux** sur les erreurs classiques (exercice 6).
- **Dériver** une puissance d'exposant négatif et en déduire les variations (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La dérivée de $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$ est :

- A. $5x^2 - 2$
- B. $15x^2 - 2x$
- C. $15x^2 - 2$ (bonne réponse)
- D. $15x^2 - 2 + 1$

Justification : $(5x^3)' = 15x^2$, $(-2x)' = -2$ et $(1)' = 0$: $f'(x) = 15x^2 - 2$.

2. La dérivée de $f(x) = (x+1)(x-3)$ est :

- A. $2x - 2$ (bonne réponse)
- B. 1
- C. $2x - 3$
- D. $2x$

Justification : $f'(x) = 1 \times (x - 3) + (x + 1) \times 1 = 2x - 2$. (Ou : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.)

3. La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$ est :

- A. $\frac{1}{(x+2)^2}$
- B. $-\frac{1}{x+2}$
- C. $-\frac{1}{x^2}$
- D. $-\frac{1}{(x+2)^2}$ (**bonne réponse**)

Justification : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = x+2$ et $v'(x) = 1$.

4. La dérivée de $f(x) = (2x+1)^2$ est :

- A. $2(2x+1)$
- B. $4(2x+1)$ (**bonne réponse**)
- C. $4x+1$
- D. $2x$

Justification : On développe : $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$, donc $f'(x) = 8x + 4 = 4(2x+1)$ (et non $2(2x+1)$).

5. La dérivée de $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est :

- A. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ (**bonne réponse**)
- B. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
- C. $2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$
- D. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

Justification : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.