

Fiche 1 : nombre dérivé et tangente

Neuf exercices pour maîtriser le nombre dérivé et la tangente :

- calculer un nombre dérivé avec la définition ;
- lire un nombre dérivé et une tangente à partir de données ;
- écrire l'équation d'une tangente ;
- tangente à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$;
- approximation linéaire ;
- lire un nombre dérivé sur un graphique et **construire une tangente** ;
- la fonction inverse : taux de variation, valeurs de $f(1+h) - f(1)$, fonction affine tangente ;
- Python : la liste des coefficients directeurs de sécantes ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le taux de variation est **écrit, simplifié par h** , puis la limite est donnée ;
- la tangente est écrite en **trois temps** : $f(a)$, $f'(a)$, équation ;
- la formule utilisée est **citée** ;
- le résultat final est une **équation réduite**.

Le modèle de rédaction d'une tangente

« On a $f(2) = \dots$ et $f'(2) = \dots$. L'équation de la tangente en **2** est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = \dots$ »

- **Calcule** $f(a)$ puis $f'(a)$, chacun sur sa ligne.
- **Cite** la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- **Réduis** pour obtenir $y = mx + p$.

Les pièges classiques

- Remplacer h par **0 avant** de simplifier : on obtient $\frac{0}{0}$.
- Oublier le $+f(a)$: la droite a la bonne pente, mais ne passe plus par le point de contact.
- Se tromper de signe avec a négatif : pour $a = -1$, on écrit $x - (-1) = x + 1$.
- Confondre $f(a)$ (une ordonnée) et $f'(a)$ (une pente).

Oublier le $+f(a)$, c'est tracer une droite qui a la bonne pente... mais qui est partie à la mauvaise adresse.

Exercice 1 (★) : nombre dérivé avec la définition

Soit $f(x) = x^2 - 3x$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ (avec $h \neq 0$) et le simplifier.
2. En déduire que f est dérivable en 2 et donner $f'(2)$.
3. Calculer ce taux pour $h = 0,1$ puis pour $h = 0,01$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 (★) : lire un nombre dérivé et une tangente

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction dérivable f passe par le point $A(1; 3)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A passe par le point $B(3; 7)$.

Par ailleurs, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 est horizontale.

1. Donner $f(1)$.
2. Déterminer $f'(1)$.
3. Écrire l'équation réduite de la tangente en A .
4. Que vaut $f'(-2)$?

Exercice 3 (★★) : équation d'une tangente

Pour chaque fonction, donner l'équation réduite de la tangente à sa courbe au point d'abscisse a indiqué.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $a = 3$.
2. $g(x) = x^3$ et $a = -1$.
3. $h(x) = 2x^3 - x^2$ et $a = 1$.

Exercice 4 (★★) : tangente à $\frac{1}{x}$ et à $\sqrt{x}$

Pour chaque question, écrire l'équation réduite de la tangente demandée.

1. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer l'équation de la tangente en $a = 2$, puis vérifier qu'elle passe par le point $(4; 0)$.
2. Soit $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer l'équation de la tangente en $a = 9$.

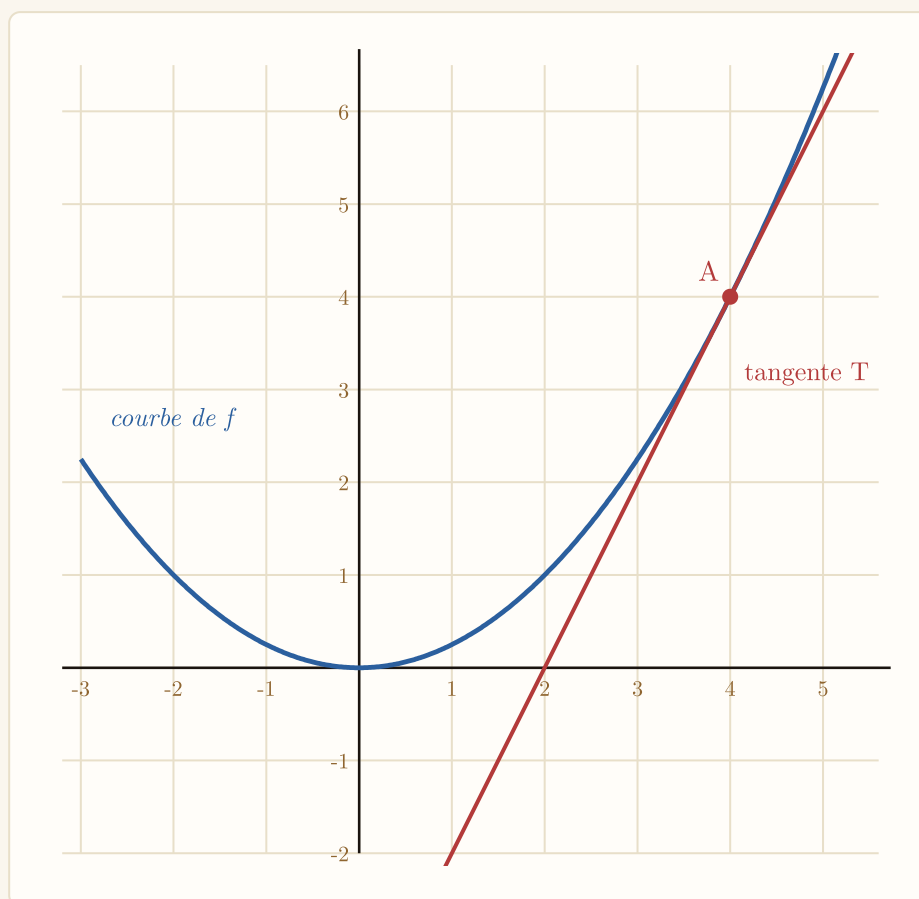
Exercice 5 (★★) : approximation linéaire

On utilise l'approximation linéaire : pour h proche de 0, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

1. Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 25$, donner une valeur approchée de $\sqrt{25,3}$ puis de $\sqrt{24,5}$.
2. Avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 1$, donner une valeur approchée de $\frac{1}{1,02}$ puis de $\frac{1}{0,97}$.
3. Comparer avec les valeurs de la calculatrice. Dans quel cas l'approximation est-elle la meilleure ?

Exercice 6 (★★) : lire un nombre dérivé et construire une tangente

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(4; 4)$.



Courbe de f et sa tangente T au point $A(4; 4)$

1. Lire graphiquement $f'(4)$ en justifiant.
2. Écrire l'équation réduite de T .
3. On sait que $D(-2; 1)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et que $f'(-2) = -1$. Construire la tangente T' à $\mathcal{C}_f$ en D , puis donner son équation réduite.
4. Lire graphiquement $f'(0)$. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine ?

Exercice 7 (★★) : la fonction inverse et les valeurs de $f(1+h) - f(1)$

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Pour $h > 0$, calculer et simplifier le taux de variation de f entre 1 et $1+h$. En déduire $f'(1)$.
2. Soit $a > 0$. Calculer et simplifier le taux de variation de f entre a et $a+h$ (avec $h > 0$). En déduire $f'(a)$.
3. Pour $h = 0,1 ; 0,01 ; 0,001$, calculer $f(1+h) - f(1)$ pour la fonction inverse, puis pour la fonction carré et la fonction racine carrée (arrondir à 10^{-6}).
4. Comparer chaque valeur avec $f'(1)h$, où $f'(1)$ est le nombre dérivé en 1 de la fonction concernée. Que remarque-t-on ?
5. Donner la fonction affine tangente en 1 de chacune des trois fonctions.

Exercice 8 (★★) : Python : la liste des coefficients directeurs de sécantes

Pour une fonction f , un réel a , un pas $h > 0$ et un entier n , on note $x_k = a + kh$. On s'intéresse aux sécantes de la courbe de f entre les points d'abscisses x_k et $x_k + h$, pour k de 0 à $n-1$.

1. Écrire une fonction Python `secantes(f, a, h, n)` qui renvoie la liste des coefficients directeurs de ces n sécantes.
2. Pour $f(x) = x^2$, $a = 1$, $h = 0,5$ et $n = 4$, déterminer à la main la liste obtenue.
3. Montrer que, pour $f(x) = x^2$, la sécante entre x et $x+h$ a pour coefficient directeur $2x+h$. Quel lien y a-t-il avec f' ?
4. Écrire la même liste en compréhension, à l'aide de la fonction `taux(f, a, h)` du cours.

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $f'(a) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale.
2. La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.
3. La fonction racine carrée est dérivable en 0.
4. Si f est dérivable en a , le taux de variation entre a et $a+h$ est égal à $f'(a)$ pour tout $h \neq 0$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Calculer un nombre dérivé avec la définition (exercices 1 et 7).
- Lire $f(a)$, $f'(a)$ et la tangente à partir de données ou d'un graphique, **construire** une tangente (exercices 2 et 6).
- Écrire l'équation d'une tangente **en trois temps** (exercices 3 et 4).
- Une **approximation linéaire** et une fonction affine tangente (exercices 5 et 7).
- Un petit programme Python sur les coefficients directeurs de sécantes (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Le taux de variation de f entre a et $a + h$ (avec $h \neq 0$) est :
 - $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 - $f(a+h) - f(a)$
 - $\frac{f(a+h)}{f(a)}$
 - $\frac{f(a+h) + f(a)}{h}$
- Si $f(x) = x^2$, que vaut $f'(5)$?
 - 25
 - 5
 - 10
 - 2
- $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :
 - $y = 3x + 4$
 - $y = 3x + 1$
 - $y = 4x + 3$
 - $y = 3(x - 1)$
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si :
 - $f(a) = 0$
 - $f'(a) = 1$
 - $a = 0$
 - $f'(a) = 0$
- Avec $f(x) = x^2$ et $a = 10$, une valeur approchée de $10,1^2$ est :
 - 102
 - 101

C. 100,1

D. 110