

Fiche 1 : nombre dérivé et tangente

Neuf exercices pour maîtriser le nombre dérivé et la tangente :

- calculer un nombre dérivé avec la définition ;
- lire un nombre dérivé et une tangente à partir de données ;
- écrire l'équation d'une tangente ;
- tangente à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$;
- approximation linéaire ;
- lire un nombre dérivé sur un graphique et **construire une tangente** ;
- la fonction inverse : taux de variation, valeurs de $f(1+h) - f(1)$, fonction affine tangente ;
- Python : la liste des coefficients directeurs de sécantes ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le taux de variation est **écrit, simplifié par h** , puis la limite est donnée ;
- la tangente est écrite en **trois temps** : $f(a)$, $f'(a)$, équation ;
- la formule utilisée est **citée** ;
- le résultat final est une **équation réduite**.

Le modèle de rédaction d'une tangente

« On a $f(2) = \dots$ et $f'(2) = \dots$. L'équation de la tangente en **2** est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = \dots$ »

- **Calcule** $f(a)$ puis $f'(a)$, chacun sur sa ligne.
- **Cite** la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- **Réduis** pour obtenir $y = mx + p$.

Les pièges classiques

- Remplacer h par **0 avant** de simplifier : on obtient $\frac{0}{0}$.
- Oublier le $+f(a)$: la droite a la bonne pente, mais ne passe plus par le point de contact.
- Se tromper de signe avec a négatif : pour $a = -1$, on écrit $x - (-1) = x + 1$.
- Confondre $f(a)$ (une ordonnée) et $f'(a)$ (une pente).

Oublier le $+f(a)$, c'est tracer une droite qui a la bonne pente... mais qui est partie à la mauvaise adresse.

Exercice 1 (★) : nombre dérivé avec la définition

Soit $f(x) = x^2 - 3x$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ (avec $h \neq 0$) et le simplifier.
2. En déduire que f est dérivable en 2 et donner $f'(2)$.
3. Calculer ce taux pour $h = 0,1$ puis pour $h = 0,01$. Que remarque-t-on ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$f(2) = 4 - 6 = -2 \text{ et } f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2.$$

Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + h - 2 + 2}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = \frac{h(h + 1)}{h}$$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 1 + h$$

Question 2

Quand h tend vers 0, $1 + h$ tend vers 1.

f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

Question 3

Pour $h = 0,1$: $1 + h = 1,1$. Pour $h = 0,01$: $1 + h = 1,01$.

Le taux de variation se rapproche de $1 = f'(2)$ quand h diminue.

Exercice 2 (★) : lire un nombre dérivé et une tangente

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction dérivable f passe par le point $A(1; 3)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A passe par le point $B(3; 7)$.

Par ailleurs, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 est horizontale.

1. Donner $f(1)$.
2. Déterminer $f'(1)$.
3. Écrire l'équation réduite de la tangente en A .
4. Que vaut $f'(-2)$?

Correction de l'exercice 2

Question 1

Le point $A(1; 3)$ appartient à $\mathcal{C}_f$: son ordonnée est $f(1)$.

$$f(1) = 3$$

Question 2

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A , c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{4}{2}$$

$$f'(1) = 2$$

Question 3

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1.$$

Vérification : pour $B(3; 7)$, $2 \times 3 + 1 = 7$.

La tangente en A a pour équation $y = 2x + 1$.

Question 4

Une tangente horizontale a un coefficient directeur nul.

$$f'(-2) = 0$$

Exercice 3 (★★) : équation d'une tangente

Pour chaque fonction, donner l'équation réduite de la tangente à sa courbe au point d'abscisse a indiqué.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $a = 3$.

2. $g(x) = x^3$ et $a = -1$.

3. $h(x) = 2x^3 - x^2$ et $a = 1$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$f(3) = 9 - 12 + 1 = -2. \text{ Comme } f'(x) = 2x - 4, f'(3) = 2.$$

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 2(x - 3) - 2$$

$$y = 2x - 8$$

Question 2

$$g(-1) = -1. \text{ Comme } g'(x) = 3x^2, g'(-1) = 3.$$

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1) = 3(x + 1) - 1$$

$$y = 3x + 2$$

Question 3

$$h(1) = 2 - 1 = 1. \text{ Comme } h'(x) = 6x^2 - 2x, h'(1) = 4.$$

$$y = h'(1)(x - 1) + h(1) = 4(x - 1) + 1$$

$$y = 4x - 3$$

Exercice 4 (★★) : tangente à $\frac{1}{x}$ et à $\sqrt{x}$

Pour chaque question, écrire l'équation réduite de la tangente demandée.

1. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer l'équation de la tangente en $a = 2$, puis vérifier qu'elle passe par le point $(4; 0)$.

2. Soit $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer l'équation de la tangente en $a = 9$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$f(2) = \frac{1}{2}. \text{ Comme } f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{x}{4} + 1$$

Pour $x = 4$: $y = -1 + 1 = 0$.

La tangente passe bien par le point $(4; 0)$.

Question 2

$$g(9) = 3. \text{ Comme } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, g'(9) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}.$$

$$y = \frac{1}{6}(x - 9) + 3 = \frac{x}{6} - \frac{3}{2} + 3$$

$$y = \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$$

Exercice 5 (★★) : approximation linéaire

On utilise l'approximation linéaire : pour h proche de 0, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

1. Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 25$, donner une valeur approchée de $\sqrt{25,3}$ puis de $\sqrt{24,5}$.

2. Avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 1$, donner une valeur approchée de $\frac{1}{1,02}$ puis de $\frac{1}{0,97}$.

3. Comparer avec les valeurs de la calculatrice. Dans quel cas l'approximation est-elle la meilleure ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

$f(25) = 5$ et $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$. On utilise $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$$\sqrt{25,3} \approx 5 + \frac{1}{10} \times 0,3 = 5,03$$

$$\sqrt{24,5} \approx 5 + \frac{1}{10} \times (-0,5) = 4,95$$

$$\sqrt{25,3} \approx 5,03 \text{ et } \sqrt{24,5} \approx 4,95$$

Question 2

$f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.

$$\frac{1}{1,02} \approx 1 + (-1) \times 0,02 = 0,98$$

$$\frac{1}{0,97} \approx 1 + (-1) \times (-0,03) = 1,03$$

$$\frac{1}{1,02} \approx 0,98 \text{ et } \frac{1}{0,97} \approx 1,03$$

Question 3

La calculatrice donne : $\sqrt{25,3} \approx 5,02991$, $\sqrt{24,5} \approx 4,94975$, $\frac{1}{1,02} \approx 0,98039$, $\frac{1}{0,97} \approx 1,03093$.

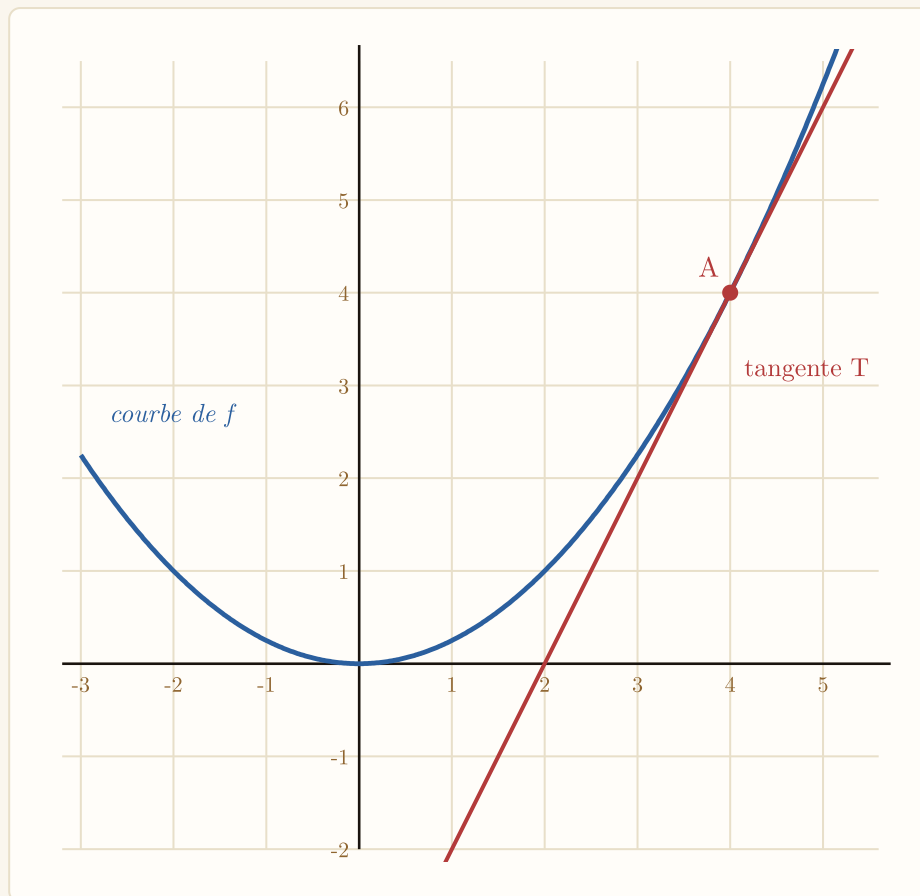
Les écarts sont d'environ 0,00009, 0,00025, 0,00039 et 0,00093.

La meilleure approximation est celle de $\sqrt{25,3}$ (écart d'environ 0,00009).

Une approximation linéaire est d'autant meilleure que h est petit ; elle dépend aussi de la fonction : près de 25, la racine carrée est très peu courbée, donc très proche de sa tangente.

Exercice 6 (★★) : lire un nombre dérivé et construire une tangente

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(4; 4)$.



Courbe de f et sa tangente T au point $A(4; 4)$

1. Lire graphiquement $f'(4)$ en justifiant.
2. Écrire l'équation réduite de T .
3. On sait que $D(-2; 1)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et que $f'(-2) = -1$. Construire la tangente T' à $\mathcal{C}_f$ en D , puis donner son équation réduite.
4. Lire graphiquement $f'(0)$. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine ?

Correction de l'exercice 6**Question 1**

La tangente T passe par $A(4; 4)$ et coupe l'axe des abscisses au point $B(2; 0)$: ce sont deux points repérables sur le quadrillage. Son coefficient directeur est

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = 2$$

$$f'(4) = 2.$$

Question 2

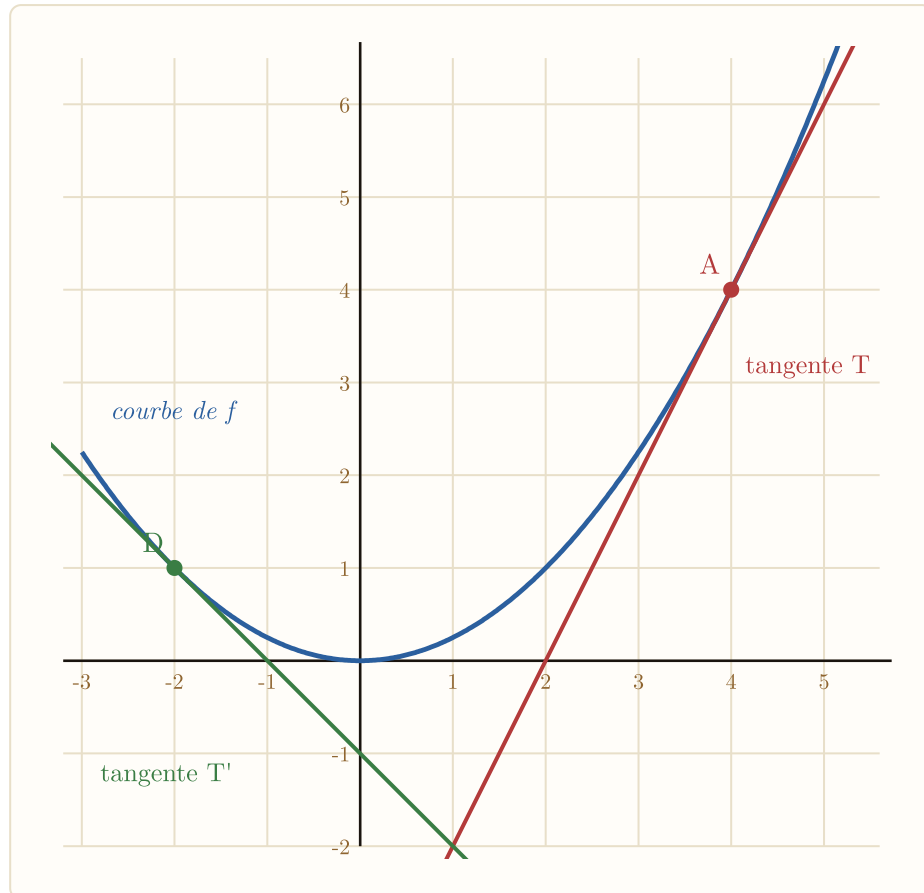
$f(4) = 4$ (ordonnée de A) et $f'(4) = 2$, donc $y = 2(x - 4) + 4$.

$$T : y = 2x - 4.$$

Vérification : pour $B(2; 0)$, $2 \times 2 - 4 = 0$.

Question 3

On part de $D(-2; 1)$, on avance de 1 vers la droite et on descend de 1 (car $f'(-2) = -1$) : on obtient le point $(-1; 0)$. On trace la droite qui passe par ces deux points.



La tangente T' en $D(-2; 1)$ passe par $(-1; 0)$

$f(-2) = 1$ et $f'(-2) = -1$, donc $y = -(x + 2) + 1$.

$$T' : y = -x - 1.$$

Question 4

À l'origine, la courbe a un point le plus bas : la tangente y est horizontale.

$f'(0) = 0$ et la tangente à l'origine est la droite d'équation $y = 0$.

(La courbe est celle de $x \mapsto \frac{x^2}{4}$: on vérifie que $f'(x) = \frac{x}{2}$ donne $f'(4) = 2$, $f'(-2) = -1$ et $f'(0) = 0$.)

Exercice 7 (★★) : la fonction inverse et les valeurs de $f(1+h) - f(1)$

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Pour $h > 0$, calculer et simplifier le taux de variation de f entre 1 et $1+h$. En déduire $f'(1)$.
2. Soit $a > 0$. Calculer et simplifier le taux de variation de f entre a et $a+h$ (avec $h > 0$). En déduire $f'(a)$.
3. Pour $h = 0,1 ; 0,01 ; 0,001$, calculer $f(1+h) - f(1)$ pour la fonction inverse, puis pour la fonction carré et la fonction racine carrée (arrondir à 10^{-6}).
4. Comparer chaque valeur avec $f'(1)h$, où $f'(1)$ est le nombre dérivé en 1 de la fonction concernée. Que remarque-t-on ?
5. Donner la fonction affine tangente en 1 de chacune des trois fonctions.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Pour $h > 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{1 - (1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{(1+h)h} = -\frac{1}{1+h}$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers -1 : $f'(1) = -1$.

Question 2

Pour $h > 0$:

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers $-\frac{1}{a^2}$: $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Question 3

h	0,1	0,01	0,001
carré : $(1+h)^2 - 1$	0,21	0,0201	0,002001
inverse : $\frac{1}{1+h} - 1$	-0,090909	-0,009901	-0,000999
racine : $\sqrt{1+h} - 1$	0,048809	0,004988	0,000500

Question 4

On a $f'(1) = 2$ pour le carré, -1 pour l'inverse et $\frac{1}{2}$ pour la racine carrée (car $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$).

h	0,1	0,01	0,001
$2h$	0,2	0,02	0,002
$-h$	-0,1	-0,01	-0,001
$\frac{h}{2}$	0,05	0,005	0,0005

Pour h proche de 0, $f(1+h) - f(1) \approx f'(1)h$, et l'approximation est d'autant meilleure que h est petit.

Question 5

La fonction affine tangente en 1 est $x \mapsto f(1) + f'(1)(x-1)$ avec $f(1) = 1$ dans les trois cas.

- carré : $1 + 2(x-1) = 2x - 1$;
- inverse : $1 - (x-1) = 2 - x$;
- racine carrée : $1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x+1}{2}$.

Les trois fonctions affines tangentes en 1 sont $x \mapsto 2x - 1$, $x \mapsto 2 - x$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$.

Exercice 8 (★★) : Python : la liste des coefficients directeurs de sécantes

Pour une fonction f , un réel a , un pas $h > 0$ et un entier n , on note $x_k = a + kh$. On s'intéresse aux sécantes de la courbe de f entre les points d'abscisses x_k et $x_k + h$, pour k de 0 à $n-1$.

1. Écrire une fonction Python `secantes(f, a, h, n)` qui renvoie la liste des coefficients directeurs de ces n sécantes.
2. Pour $f(x) = x^2$, $a = 1$, $h = 0,5$ et $n = 4$, déterminer à la main la liste obtenue.
3. Montrer que, pour $f(x) = x^2$, la sécante entre x et $x + h$ a pour coefficient directeur $2x + h$. Quel lien y a-t-il avec f' ?
4. Écrire la même liste en compréhension, à l'aide de la fonction `taux(f, a, h)` du cours.

Correction de l'exercice 8

Question 1

On part d'une liste vide. Pour chaque k , on calcule x_k puis le taux de variation entre x_k et $x_k + h$, et on l'ajoute à la liste.

```
def secantes(f, a, h, n):
    L = []
    for k in range(n):
        x = a + k * h
        L.append((f(x + h) - f(x)) / h)
    return L
```

Question 2

Les abscisses sont $x_k = 1; 1,5; 2; 2,5$ et $f(x) = x^2$:

- $k = 0 : \frac{1,5^2 - 1^2}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5 ;$
- $k = 1 : \frac{2^2 - 1,5^2}{0,5} = \frac{1,75}{0,5} = 3,5 ;$
- $k = 2 : \frac{2,5^2 - 2^2}{0,5} = \frac{2,25}{0,5} = 4,5 ;$
- $k = 3 : \frac{3^2 - 2,5^2}{0,5} = \frac{2,75}{0,5} = 5,5.$

La liste est $[2.5, 3.5, 4.5, 5.5]$.

Question 3

Pour $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Les éléments de la liste valent $2x_k + h$: ils approchent $f'(x_k) = 2x_k$, avec une erreur égale au pas h . Plus le pas est petit, meilleure est l'approximation.

Question 4

On applique `taux` à chaque abscisse $x_k = a + kh$:

```
[taux(f, a + k * h, h) for k in range(n)]
```

Cette ligne donne la même liste que la fonction `secantes`.

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $f'(a) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale.
2. La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.
3. La fonction racine carrée est dérivable en 0.
4. Si f est dérivable en a , le taux de variation entre a et $a + h$ est égal à $f'(a)$ pour tout $h \neq 0$.

Correction de l'exercice 9

Affirmation 1

Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a) = 0$: la droite est horizontale, d'équation $y = f(a)$.

Vrai.

Affirmation 2

Pour $f(x) = x^2$: $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$, donc la tangente est $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Pour $x = 0$, on trouve $y = -1 \neq 0$: elle ne passe pas par l'origine.

Faux.

Affirmation 3

Pour $h > 0$, le taux de variation entre 0 et h vaut $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, qui n'a pas de limite finie quand h tend vers 0.

Faux.

Affirmation 4

Le nombre dérivé est la **limite** du taux de variation, pas sa valeur. Par exemple, pour $f(x) = x^2$ en $a = 3$, le taux vaut $6 + h \neq 6$ pour tout $h \neq 0$.

Faux.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Calculer un nombre dérivé avec la définition (exercices 1 et 7).
- Lire $f(a)$, $f'(a)$ et la tangente à partir de données ou d'un graphique, **construire** une tangente (exercices 2 et 6).
- Écrire l'équation d'une tangente **en trois temps** (exercices 3 et 4).
- Une **approximation linéaire** et une fonction affine tangente (exercices 5 et 7).
- Un petit programme Python sur les coefficients directeurs de sécantes (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ (avec $h \neq 0$) est :

- A. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (bonne réponse)
- B. $f(a+h) - f(a)$

- C. $\frac{f(a+h)}{f(a)}$
 D. $\frac{f(a+h) + f(a)}{h}$

Justification : C'est le coefficient directeur de la sécante : variation des ordonnées sur variation des abscisses, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2. Si $f(x) = x^2$, que vaut $f'(5)$?

- A. 25
 B. 5
 C. 10 (bonne réponse)
 D. 2

Justification : $f'(x) = 2x$, donc $f'(5) = 10$.

3. $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :

- A. $y = 3x + 4$
 B. $y = 3x + 1$ (bonne réponse)
 C. $y = 4x + 3$
 D. $y = 3(x - 1)$

Justification : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 4 = 3x + 1$.

4. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si :

- A. $f(a) = 0$
 B. $f'(a) = 1$
 C. $a = 0$
 D. $f'(a) = 0$ (bonne réponse)

Justification : Une droite horizontale a un coefficient directeur nul : $f'(a) = 0$.

5. Avec $f(x) = x^2$ et $a = 10$, une valeur approchée de $10,1^2$ est :

- A. 102 (bonne réponse)
 B. 101
 C. 100,1
 D. 110

Justification : $f(10) = 100$ et $f'(10) = 20$, donc $10,1^2 \approx 100 + 20 \times 0,1 = 102$ (valeur exacte : 102,01).