

# Dérivation : le cours

Quand une voiture roule, le compteur n'indique pas la distance parcourue : il indique sa **vitesse à cet instant précis**. La dérivation sert exactement à cela : mesurer **à quelle vitesse une grandeur est en train de changer, à un instant donné**.

Sur une courbe, cette « vitesse de variation » devient la **pente de la tangente**, la droite qui épouse la courbe en un point. Ce chapitre t'apprend à la calculer, à écrire l'équation d'une tangente et à dériver rapidement toutes les fonctions du programme.

Dans tout le cours, tu verras des astuces, des pièges et un peu d'humour.

## Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : **nombre dérivé = pente de la tangente** ; fonction dérivée = la formule qui donne cette pente en chaque point.
- Pour une tangente, retiens les trois temps :  $f(a)$ , puis  $f'(a)$ , puis  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

## 1. Taux de variation et nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , un réel  $a \in I$  et un réel  $h \neq 0$  tel que  $a + h \in I$ . Le **taux de variation** de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est le nombre

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le **coefficient directeur (la pente) de la sécante** qui passe par les points  $A(a; f(a))$  et  $M(a+h; f(a+h))$  de la courbe.

**Définition.** La fonction  $f$  est **dérivable en  $a$**  si le taux de variation  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  se rapproche d'un **nombre réel** quand  $h$  se rapproche de 0 (on dit qu'il a une **limite finie** quand  $h$  tend vers 0). Ce réel est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

*Exemple 1.* Pour  $f(x) = x^2$  et  $a = 3$ , avec  $h \neq 0$  :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

Quand  $h$  tend vers 0,  $6 + h$  tend vers 6. Donc  $f$  est dérivable en 3 et  $f'(3) = 6$ .

*Exemple 2 (la fonction inverse).* Pour  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $a = 2$ , avec  $h \neq 0$  et  $h \neq -2$  :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2(2+h)h} = -\frac{1}{2(2+h)}$$

Quand  $h$  tend vers 0, ce taux tend vers  $-\frac{1}{4}$ . Donc  $f$  est dérivable en 2 et  $f'(2) = -\frac{1}{4}$ .

**Astuce.** Pour calculer un nombre dérivé avec la définition, fais toujours les mêmes quatre gestes :

1. écrire  $f(a+h)$  et  $f(a)$  ;
2. développer et **simplifier le numérateur** ;
3. **simplifier par  $h$**  (c'est permis, car  $h \neq 0$ ) ;
4. seulement après, faire tendre  $h$  vers 0.

**Pièges :**

- Ne remplace **jamais**  $h$  par 0 dans la fraction de départ : tu obtiendrais  $\frac{0}{0}$ , qui ne veut rien dire.
- «  $h$  tend vers 0 » ne veut pas dire «  $h$  vaut 0 » :  $h$  est aussi petit que l'on veut, mais jamais nul.
- Le nombre dérivé  $f'(a)$  est un **nombre** ; la fonction dérivée  $f'$  est une **fonction**. Ne les confonds pas.

Diviser par 0, c'est comme demander à un robot de lire une page blanche : il plante.

**Un calcul numérique pour voir venir la limite.** Pour  $a = 1$ , regardons le taux  $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  quand  $h$  prend des valeurs proches de 0, pour les fonctions carré, inverse et racine carrée :

| $h$                             | 0,1       | 0,01      | 0,001     | limite        |
|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| carré $x \mapsto x^2$           | 2,1       | 2,01      | 2,001     | 2             |
| inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ | -0,909... | -0,990... | -0,999... | -1            |
| racine $x \mapsto \sqrt{x}$     | 0,488...  | 0,498...  | 0,499...  | $\frac{1}{2}$ |

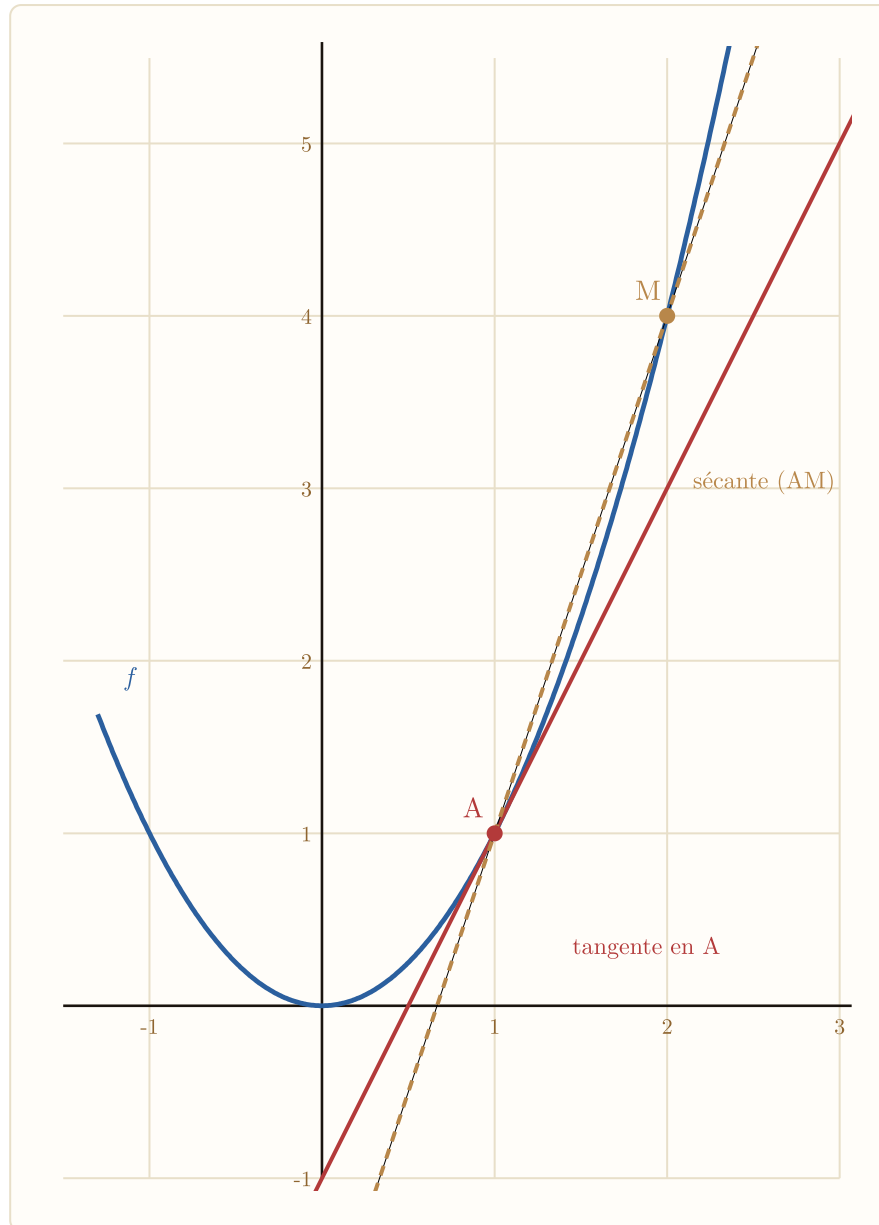
Pour  $h$  proche de 0, on a donc  $f(1+h) - f(1) \approx f'(1)h$ , avec  $f'(1) = 2, -1$  et  $\frac{1}{2}$  : c'est une **approximation linéaire**, que l'on retrouve au paragraphe 5.

**Quand ça ne marche pas.** Toutes les fonctions ne sont pas dérivables en tout point :

- La fonction racine carrée **n'est pas dérivable en 0** : pour  $h > 0$ , le taux de variation entre 0 et  $h$  vaut  $\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ , qui devient aussi grand que l'on veut quand  $h$  tend vers 0. Pas de limite finie : la courbe a une tangente **verticale** à l'origine.
- La fonction valeur absolue **n'est pas dérivable en 0** : le taux de variation vaut  $\frac{|h|}{h} = 1$  si  $h > 0$  et  $-1$  si  $h < 0$ . Deux valeurs différentes selon le côté : la courbe a un **point anguleux**.

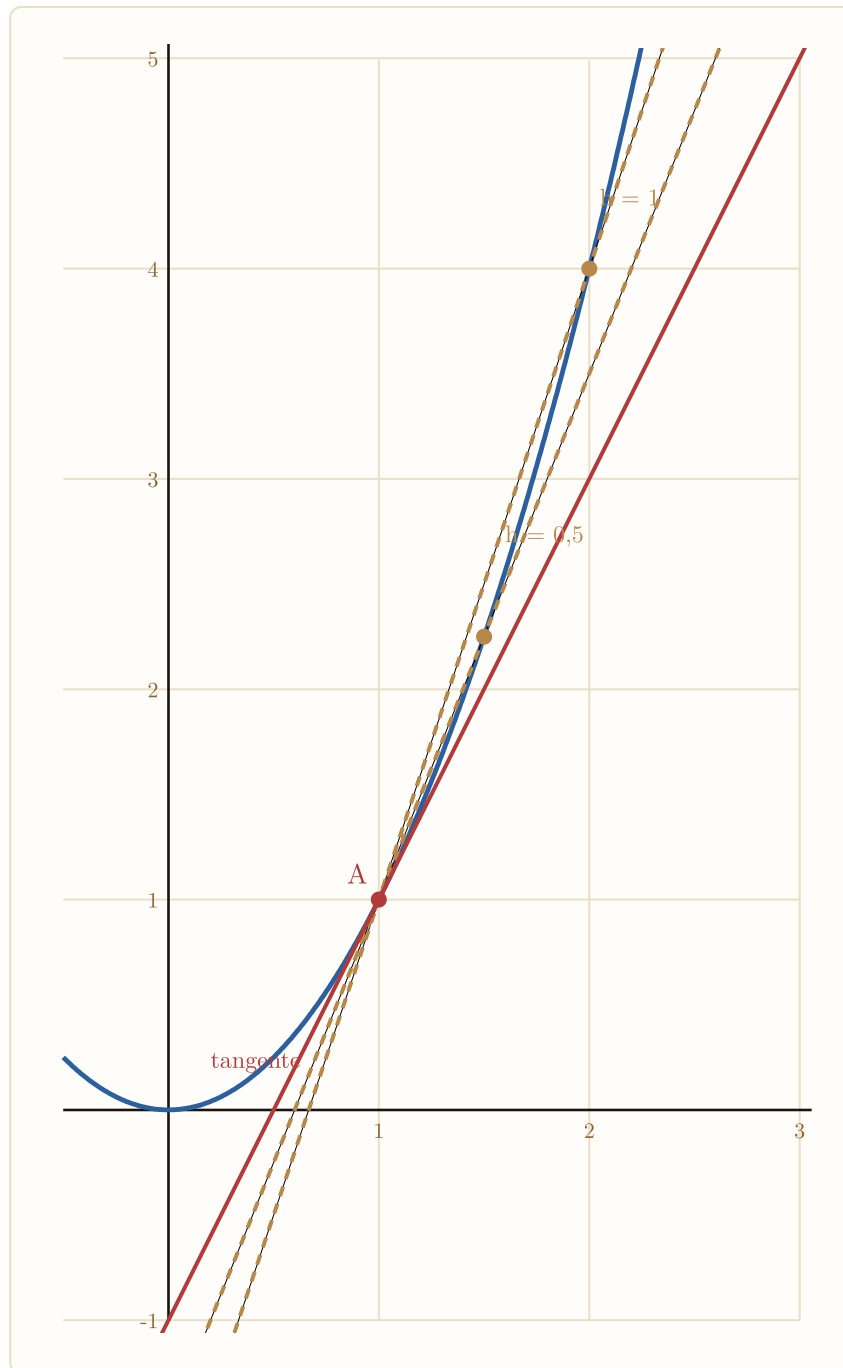
## 2. Tangente à une courbe

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la **tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(a; f(a))$  est la droite qui passe par  $A$  et dont le **coefficient directeur** est  $f'(a)$ .



La tangente en  $A$  à la courbe de  $x \mapsto x^2$  et une sécante  $(AM)$

C'est la « **limite des sécantes** » : quand  $M$  se rapproche de  $A$  le long de la courbe, la sécante  $(AM)$  se rapproche de la tangente.



Quand M se rapproche de A, la sécante tend vers la tangente

*Exemple.*  $f(x) = x^2$  en  $a = 1$ . Le coefficient directeur de la sécante entre les abscisses 1 et  $1 + h$  vaut  $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$ .

| $h$                       | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
|---------------------------|---|-----|------|-------|
| Coefficient de la sécante | 3 | 2,1 | 2,01 | 2,001 |

Les coefficients se rapprochent de  $2 = f'(1)$  : c'est le coefficient directeur de la tangente.

**Équation de la tangente en  $a$  :**

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

En particulier, la tangente est **horizontale** en  $a$  si et seulement si  $f'(a) = 0$  ; son équation est alors  $y = f(a)$ .

**Démonstration de l'équation de la tangente.** La tangente est une droite non verticale de coefficient directeur  $m = f'(a)$ , donc elle a une équation de la forme  $y = mx + p$ . Elle passe par  $A(a; f(a))$  :

$$f(a) = ma + p \quad \text{donc} \quad p = f(a) - ma$$

Alors  $y = mx + f(a) - ma$ , c'est-à-dire  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .  $\square$

La fonction affine  $T : x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$  est appelée **fonction affine tangente** à  $f$  en  $a$  : sa représentation graphique est la tangente.

**Méthode : écrire l'équation d'une tangente**

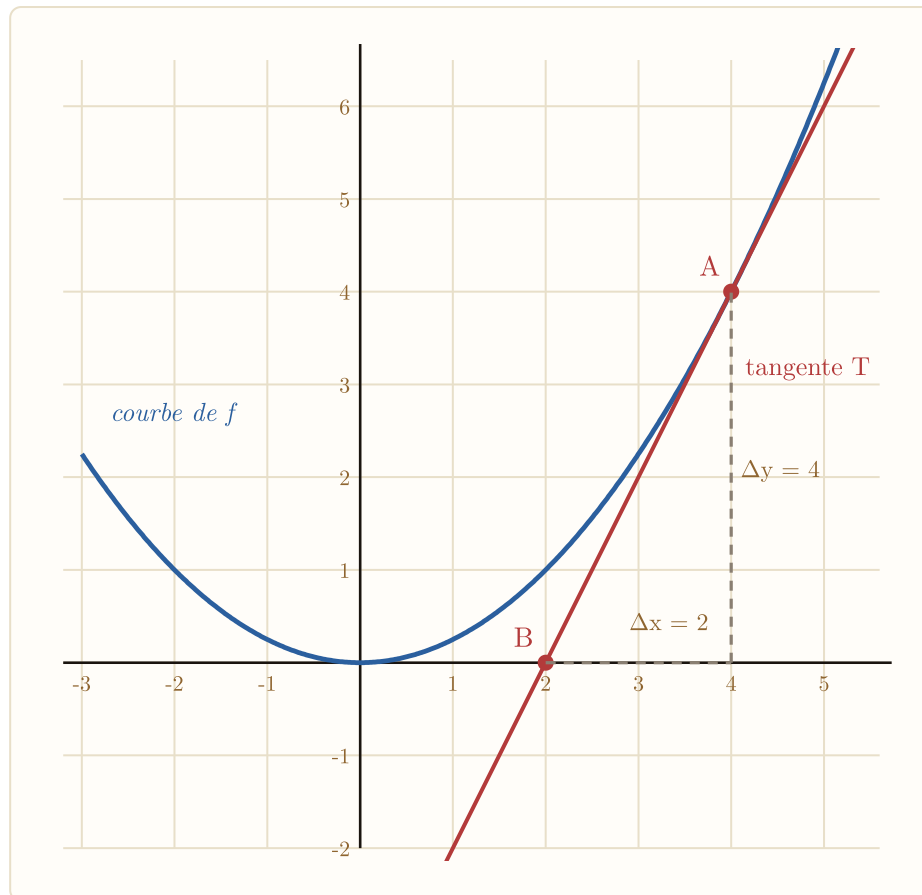
1. Calculer  $f(a)$  (l'ordonnée du point de contact).
2. Calculer  $f'(a)$  (la pente).
3. Remplacer dans  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  et réduire.

*Exemple.* Tangente à la parabole de  $f(x) = x^2$  au point d'abscisse **3**. On a  $f(3) = 9$  et  $f'(3) = 6$ , donc

$$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$$

**Lire un nombre dérivé sur un graphique, construire une tangente.**

- **Lire  $f'(a)$**  : repère deux points de la tangente faciles à lire sur le quadrillage, puis calcule la pente  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .
- **Construire la tangente en  $A(a; f(a))$**  quand on connaît  $f'(a)$  : place  $A$ , avance de 1 vers la droite et monte de  $f'(a)$  (descends si  $f'(a) < 0$ ), puis trace la droite qui passe par ces deux points.



Courbe de  $f$ , tangente  $T$  en  $A(4 ; 4)$  : elle passe par  $B(2 ; 0)$ , donc  $f'(4) = \Delta y / \Delta x = 4 / 2 = 2$

*Exemple.* Sur la figure, la tangente  $T$  en  $A(4 ; 4)$  passe par  $B(2 ; 0)$ . Donc  $f'(4) = \frac{4 - 0}{4 - 2} = 2$  : on avance de 2 vers la droite, on monte de 4.

### 3. Fonction dérivée et dérivées usuelles

Si  $f$  est dérivable en **tout** point d'un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$** . La fonction  $f'$  qui, à chaque  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  est la **fonction dérivée** de  $f$ .

**Les dérivées à connaître par cœur :**

| $f(x)$                        | $f'(x)$               | Dérivable sur                                          |
|-------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|
| $k$ (constante)               | 0                     | $\mathbb{R}$                                           |
| $x$                           | 1                     | $\mathbb{R}$                                           |
| $x^2$                         | $2x$                  | $\mathbb{R}$                                           |
| $x^3$                         | $3x^2$                | $\mathbb{R}$                                           |
| $x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )  | $nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ ; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$ |
| $\frac{1}{x}$ (cas $n = -1$ ) | $-\frac{1}{x^2}$      | $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$                   |
| $\sqrt{x}$                    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $] 0 ; +\infty[$                                       |

**Pourquoi ces formules ?** Dans chaque cas, on écrit le taux de variation entre  $a$  et  $a + h$  (avec  $h \neq 0$ ), on simplifie par  $h$ , puis on fait tendre  $h$  vers 0.

- **Carré.**  $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$ , qui tend vers  $2a$ . Donc  $(x^2)' = 2x$ .
- **Cube.**  $\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$ , qui tend vers  $3a^2$ . Donc  $(x^3)' = 3x^2$ .
- **Inverse** ( $a \neq 0$ ).  $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a(a+h)}$ , qui tend vers  $-\frac{1}{a^2}$ . Donc  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .
- **Racine carrée** ( $a > 0$ ). On multiplie en haut et en bas par  $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$  :  $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ , qui tend vers  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ . Donc  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Astuce.** La formule  $(x^n)' = nx^{n-1}$  se lit : « l'exposant descend en facteur, puis diminue de 1 ». Ainsi  $(x^5)' = 5x^4$  et  $(x^3)' = 3x^2$ . Les cas  $x$  et  $x^2$  en sont des cas particuliers :  $(x^1)' = 1 \times x^0 = 1$ . Le cas  $n < 0$  est démontré au paragraphe 4.

#### 4. Opérations sur les fonctions dérivables

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel. Les fonctions suivantes sont dérivables sur  $I$  (pour l'inverse et le quotient, il faut que  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ ) et :

| Fonction                 | Dérivée                 |
|--------------------------|-------------------------|
| somme $u + v$            | $u' + v'$               |
| produit par un réel $ku$ | $ku'$                   |
| produit $uv$             | $u'v + uv'$             |
| inverse $\frac{1}{v}$    | $-\frac{v'}{v^2}$       |
| quotient $\frac{u}{v}$   | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |

**Pour ne pas se tromper :**

- **Produit** : « je dérive le premier et je garde le second, **plus** je garde le premier et je dérive le second ».
- **Quotient** : le numérateur est  $u'v - uv'$  **dans cet ordre** (le signe moins ne commute pas !), le dénominateur est  $v^2$ .
- **Inverse** : un **signe moins**, la dérivée du dénominateur au numérateur, le **carré** du dénominateur.

Quatre exemples, rédigés comme on l'attend.

a) **Un polynôme.**  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 7 = 12x^2 - 10x + 7$$

**b) Un produit.**  $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$  avec  $u(x) = x^2 + 1$ ,  $u'(x) = 2x$ ,  $v(x) = 3x - 2$ ,  $v'(x) = 3$ .  
Donc

$$f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$$

Ici, on peut aussi développer d'abord :  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ , d'où  $f'(x) = 9x^2 - 4x + 3$ . Même résultat, deux chemins. C'est aussi la bonne méthode pour un carré comme  $(3x + 2)^2$  : on développe en  $9x^2 + 12x + 4$ , donc la dérivée est  $18x + 12$ .

**c) Un quotient.**  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$  sur  $]3; +\infty[$ , avec  $u(x) = 2x + 1$ ,  $u'(x) = 2$ ,  $v(x) = x - 3$ ,  $v'(x) = 1$ .  
Donc

$$f'(x) = \frac{2(x - 3) - (2x + 1) \times 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x - 3)^2} = \frac{-7}{(x - 3)^2}$$

**d) Un inverse.**  $f(x) = \frac{1}{4x - 1}$  sur  $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$ , avec  $v(x) = 4x - 1$  et  $v'(x) = 4$  ;  $v$  ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{4}{(4x - 1)^2}$$

#### Pièges :

- $(uv)' \neq u'v'$  : la dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées.
- Dériver  $(3x + 2)^2$  « comme  $x^2$  » en écrivant  $2(3x + 2)$  : c'est faux. Développe d'abord (ou écris un produit) : la dérivée vaut  $18x + 12$ .
- Dériver un quotient sans recopier le **carré du dénominateur** ( $v^2$ , pas  $v$ ).
- Oublier de préciser l'**ensemble de dérivabilité** (par exemple  $]3; +\infty[$  pour  $\frac{2x + 1}{x - 3}$  si l'énoncé le demande).

La formule du produit a deux termes : si tu n'en écris qu'un, c'est un produit à moitié dérivé.

**Puissances d'exposant entier relatif.** La formule des puissances reste vraie pour un exposant négatif :

**Propriété.** Pour tout entier  $n$  relatif, la fonction  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur son ensemble de définition ( $\mathbb{R}^*$  si  $n < 0$ ) et

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

*Démonstration pour  $n < 0$ .* On pose  $n = -m$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $x^n = \frac{1}{x^m} = \frac{1}{v}$  avec  $v(x) = x^m$  et  $v'(x) = m x^{m-1}$ . Par la formule de l'inverse :

$$(x^n)' = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} = n x^{n-1} \quad \square$$

*Exemples.*  $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$  et  $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = (2x^{-2})' = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$ .

**Astuce.** Réécris  $\frac{1}{x^n}$  en  $x^{-n}$  **avant** de dériver : tu n'as plus de quotient à gérer.

## 5. Approximation linéaire

Près du point de contact, la courbe est très proche de sa tangente. Autrement dit, pour  $h$  proche de 0, la valeur de  $f$  en  $a + h$  est proche de celle de la fonction affine tangente  $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$  en  $x = a + h$  :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$$

*Exemple.* Pour calculer  $\sqrt{4,04}$  sans calculatrice, on prend  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 4$  et  $h = 0,04$ . On a  $f(4) = 2$  et  $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ . Donc

$$\sqrt{4,04} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 0,04 = 2,01$$

La calculatrice donne 2,00998... : l'approximation est excellente, et d'autant meilleure que  $h$  est petit.

## 6. Vitesse, coût marginal et notations des sciences

- **Vitesse.** Si  $d(t)$  est la position d'un mobile à l'instant  $t$ , le taux de variation entre  $a$  et  $a + h$  est sa **vitesse moyenne** sur cet intervalle de temps. Sa **vitesse instantanée** à l'instant  $a$  est le nombre dérivé  $d'(a)$ .
- **Coût marginal.** Si  $C(q)$  est le coût de fabrication de  $q$  objets,  $C'(q)$  approche le coût de fabrication de l'objet **supplémentaire** (le  $(q + 1)$ -ième).
- **Géométrie.** Le taux de variation est la pente d'une sécante, le nombre dérivé est la pente d'une tangente.

*Exemple.* Avec  $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$  (en euros), on a  $C'(q) = q + 10$ , donc  $C'(20) = 30$  : fabriquer le 21<sup>e</sup> objet coûte environ 30 €. (Le calcul exact donne  $C(21) - C(20) = 30,5$  €.)

**Notation**  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  et  $\frac{dy}{dx}$ . En physique et en économie, on note  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  un taux de variation et  $\frac{dy}{dx}$  une dérivée : si  $y = f(x)$ , on écrit  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Selon le contexte, on adapte les lettres : si  $x = f(t)$  est une position,  $\frac{dx}{dt}$  est la vitesse instantanée ; si  $q = f(t)$  est une quantité,  $\frac{dq}{dt}$  est sa vitesse de variation.

## 7. Python

```
def taux(f, a, h):
    return (f(a + h) - f(a)) / h

def f(x):
    return x**2

for k in range(1, 6):
    h = 10 ** (-k)
    print(h, taux(f, 3, h))
```

Les valeurs affichées s'approchent de 6 à mesure que  $h$  diminue : environ 6,1, puis 6,01, puis 6,001, et ainsi de suite, à de minuscules erreurs d'arrondi près. C'est une **illustration** du fait que  $f'(3) = 6$ , pas une preuve.

**Liste des coefficients directeurs des sécantes.** Pour un pas  $h$  donné, on construit la liste des coefficients directeurs des sécantes de la courbe entre  $x_k = a + kh$  et  $x_k + h$ , pour  $k$  de 0 à  $n - 1$  :

```
def secantes(f, a, h, n):
    L = []
    for k in range(n):
        x = a + k * h
        L.append((f(x + h) - f(x)) / h)
    return L

print(secantes(f, 0, 0.5, 4))  # affiche [0.5, 1.5, 2.5, 3.5]
```

Pour  $f(x) = x^2$ , la sécante entre  $x$  et  $x + h$  a pour coefficient directeur  $2x + h$  : avec  $h = 0,5$  et  $x = 0; 0,5; 1; 1,5$ , on trouve bien 0,5; 1,5; 2,5; 3,5. Avec un pas plus petit, ces nombres se rapprochent de  $f'(x) = 2x$ .

La même liste s'écrit en une ligne, **en compréhension** : `[taux(f, a + k * h, h) for k in range(n)]`.

## 8. Démonstrations au programme

Les démonstrations au programme sont : l'équation de la tangente, la non-dérivabilité de la racine carrée en 0, la dérivée du carré et de l'inverse, et la dérivée d'un produit. Les trois premières sont dans les paragraphes 2, 1 et 3. Voici la dernière, puis la preuve de la formule  $\left(\frac{1}{v}\right)'$  qui sert à dériver un inverse, un quotient ou une puissance négative.

**Dérivée d'un produit.** Pour  $u$  et  $v$  dérivables en  $a$ , on écrit le taux de variation du produit en ajoutant et retranchant  $u(a+h)v(a)$  :

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Quand  $h$  tend vers 0, les deux taux tendent vers  $v'(a)$  et  $u'(a)$ . Il reste à voir que  $u(a+h)$  tend vers  $u(a)$  : on a  $u(a+h) - u(a) = h \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ , qui tend vers  $0 \times u'(a) = 0$  (c'est la continuité des fonctions dérivables, que l'on retrouve ici). On obtient  $(uv)'(a) = u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$ .  $\square$

**Dérivée de l'inverse d'une fonction.** Pour  $v$  dérivable en  $a$  avec  $v(a) \neq 0$  :

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h v(a) v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) v(a+h)}$$

Quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient  $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$ .  $\square$

## 9. Un peu d'histoire

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux et variés : cinématique, mécanique, géométrie, optimisation.

Chez **Leibniz** et **Newton**, le calcul des variations repose sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent **linéairement** quand on leur applique de **petites variations** : c'est l'idée de l'approximation linéaire du paragraphe 5. Leurs approches partent d'une notion intuitive mais floue d'**infinitement petit**.

Ce n'est que très progressivement que les notions de **limite** et de **différentielle**, qui fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au **XIXe siècle**.

## 10. Les 10 pépites du chapitre

1. **Taux de variation** :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (avec  $h \neq 0$ ) ; simplifier **avant** de faire tendre  $h$  vers 0.
2. **Nombre dérivé**  $f'(a)$  : pente de la tangente en  $A(a; f(a))$ .
3. **Tangente** :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  ; trois temps :  $f(a)$ ,  $f'(a)$ , équation.
4. **Tangente horizontale** :  $f'(a) = 0$ .
5. **Dérivées usuelles** :  $k \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 1$ ,  $x^n \rightarrow nx^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ ,  $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
6. **Somme et multiple** :  $(u + v)' = u' + v'$  et  $(ku)' = ku'$ .
7. **Produit** :  $(uv)' = u'v + uv'$  (deux termes).
8. **Quotient** :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  (dans cet ordre).
9. **Inverse** :  $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$  (signe moins et carré).
10. **Approximation linéaire** :  $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$  pour  $h$  proche de 0.

## 11. Ce qui peut tomber en contrôle

- **Calculer un nombre dérivé** avec la définition, puis donner l'équation de la tangente (fiche 1).
- **Lire** un nombre dérivé sur un graphique et **construire** une tangente (fiche 1).
- **Dériver** un polynôme, un produit, un inverse, un quotient, une puissance d'exposant entier relatif (fiche 2).
- **Problèmes de tangentes** : tangente horizontale, parallèle à une droite, position par rapport à la courbe (fiche 3).
- **Interpréter** un nombre dérivé : vitesse, coût marginal, approximation linéaire.

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.