

Dérivation : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction polynôme de degré **3** : dérivée factorisée, tangentes horizontales, tangente et position relative ;
- un quotient : dérivée, tangente, position relative, tangente parallèle à une droite ;
- approximation d'un nombre dérivé : calcul exact, taux de variation et script Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- dérivée **justifiée** (formules citées, u , v écrits) et **factorisée** ;
- tangente écrite en **trois temps** ;
- position relative obtenue par le **signe d'une différence factorisée** ;
- conclusions **complètes**, avec les équations ou les valeurs demandées.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une dérivée, écris **d'abord** la formule utilisée et les fonctions u , u' , v , v' .
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une cubique et ses tangentes

Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3x - 2)(x - 2)$.
2. En quels points de $\mathcal{C}_f$ la tangente est-elle horizontale ? Donner les équations de ces tangentes.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Montrer que $f(x) - (-x + 2) = (x - 1)^2(x - 2)$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .

Exercice 2 : un quotient et ses tangentes

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de f' sur I .
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Montrer que $f(x) - (3x - 1) = \frac{-3x^2}{x+1}$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
4. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x$? Si oui, donner l'équation de cette tangente.

Exercice 3 : approcher un nombre dérivé

Soit $f(x) = x^3$ et $a = 2$.

1. Calculer $f'(2)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
2. Pour $h \neq 0$, simplifier le taux de variation $\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$. Exprimer $\tau(h) - f'(2)$.
3. Écrire un script Python qui détermine le plus petit entier k tel que $|\tau(10^{-k}) - 12| < 10^{-3}$. Donner la valeur affichée et l'interpréter.