

Dérivation : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction polynôme de degré **3** : dérivée factorisée, tangentes horizontales, tangente et position relative ;
- un quotient : dérivée, tangente, position relative, tangente parallèle à une droite ;
- approximation d'un nombre dérivé : calcul exact, taux de variation et script Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- dérivée **justifiée** (formules citées, u , v écrits) et **factorisée** ;
- tangente écrite en **trois temps** ;
- position relative obtenue par le **signe d'une différence factorisée** ;
- conclusions **complètes**, avec les équations ou les valeurs demandées.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une dérivée, écris **d'abord** la formule utilisée et les fonctions u , u' , v , v' .
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une cubique et ses tangentes

Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3x - 2)(x - 2)$.
2. En quels points de $\mathcal{C}_f$ la tangente est-elle horizontale ? Donner les équations de ces tangentes.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Montrer que $f(x) - (-x + 2) = (x - 1)^2(x - 2)$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .

Correction de la question 1

f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.

Développons : $(3x - 2)(x - 2) = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x^2 - 8x + 4$.

$$f'(x) = (3x - 2)(x - 2)$$

Correction de la question 2

La tangente est horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 2$.

$$f(2) = 8 - 16 + 8 = 0 \text{ et } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{8 - 48 + 72}{27} = \frac{32}{27}.$$

Au point $\left(\frac{2}{3}; \frac{32}{27}\right)$, la tangente a pour équation $y = \frac{32}{27}$; au point $(2; 0)$, elle a pour équation $y = 0$.

Correction de la question 3

$$f(1) = 1 - 4 + 4 = 1 \text{ et } f'(1) = (3 - 2)(1 - 2) = -1.$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 1$$

T a pour équation $y = -x + 2$.

Correction de la question 4

$$f(x) - (-x + 2) = x^3 - 4x^2 + 4x + x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

$$(x - 1)^2(x - 2) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Le facteur $(x - 1)^2$ est positif ou nul ; le signe est donc celui de $x - 2$, sauf en $x = 1$ où la différence s'annule.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x - 1)^2$		+	0	+		+	
$x - 2$		-		-	0	+	
$f(x) - (-x + 2)$		-	0	-	0	+	

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de T sur $] -\infty; 2]$ (avec un contact en $x = 1$) et au-dessus de T sur $[2; +\infty[$.

Autrement dit, T touche la courbe en $x = 1$ sans la traverser, puis la recoupe en $x = 2$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : dérivée **développée pour vérifier** la forme factorisée.
- **Q2** : équation $f'(x) = 0$ résolue, **deux** points avec leurs ordonnées et leurs tangentes.
- **Q3** : tangente en **trois temps** ($f(1)$, $f'(1)$, équation).
- **Q4** : différence **développée et factorisée**, signe justifié par le tableau, conclusion sur la position avec les intervalles.

Exercice 2 : un quotient et ses tangentes

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de f' sur I .
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Montrer que $f(x) - (3x-1) = \frac{-3x^2}{x+1}$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
4. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x$? Si oui, donner l'équation de cette tangente.

Correction de la question 1

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$, et v ne s'annule pas sur I .

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x+1) - (2x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in I$, $(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ sur I .

Correction de la question 2

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = 3.$$

$$y = 3(x-0) + (-1)$$

T a pour équation $y = 3x - 1$.

Correction de la question 3

$$f(x) - (3x - 1) = \frac{2x - 1}{x + 1} - (3x - 1) = \frac{2x - 1 - (3x - 1)(x + 1)}{x + 1}$$

$(3x - 1)(x + 1) = 3x^2 + 2x - 1$, donc le numérateur vaut $2x - 1 - 3x^2 - 2x + 1 = -3x^2$.

$$f(x) - (3x - 1) = \frac{-3x^2}{x + 1}$$

Sur I , $x + 1 > 0$ et $-3x^2 \leq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$.

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de T sur I , avec un seul point commun : le point d'abscisse 0.

Correction de la question 4

On cherche $x \in I$ tel que $f'(x) = \frac{3}{4} : \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} \iff (x+1)^2 = 4 \iff x+1 = 2$ ou $x+1 = -2$.

Comme $x > -1$, on a $x+1 > 0$: seule la solution $x+1 = 2$, soit $x = 1$, convient.

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ et } f'(1) = \frac{3}{4}, \text{ donc } y = \frac{3}{4}(x - 1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Oui : au point d'abscisse 1, la tangente est parallèle à la droite $y = \frac{3}{4}x$; son équation est $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : u , u' , v , v' écrits, formule du quotient citée, signe justifié par le **carré**.
- **Q2** : tangente en trois temps.
- **Q3** : mise au **même dénominateur**, numérateur développé, signe justifié sur I (où $x + 1 > 0$).
- **Q4** : équation $f'(x) = \frac{3}{4}$ résolue, **solution rejetée** car hors de I , équation de la tangente.

Exercice 3 : approcher un nombre dérivé

Soit $f(x) = x^3$ et $a = 2$.

1. Calculer $f'(2)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
2. Pour $h \neq 0$, simplifier le taux de variation $\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$. Exprimer $\tau(h) - f'(2)$.
3. Écrire un script Python qui détermine le plus petit entier k tel que $|\tau(10^{-k}) - 12| < 10^{-3}$. Donner la valeur affichée et l'interpréter.

Correction de la question 1

$f'(x) = 3x^2$, donc $f'(2) = 12$. De plus $f(2) = 8$.

$$y = 12(x - 2) + 8$$

$f'(2) = 12$ et la tangente a pour équation $y = 12x - 16$.

Correction de la question 2

$$\tau(h) = \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h}$$

$$\tau(h) = 12 + 6h + h^2$$

Donc $\tau(h) - 12 = 6h + h^2$, qui tend vers 0 quand h tend vers 0 : on retrouve $f'(2) = 12$.

Correction de la question 3

```
def tau(h):
    return ((2 + h) ** 3 - 2 ** 3) / h

k = 0
while abs(tau(10 ** (-k)) - 12) >= 0.001:
    k = k + 1
print(k)
```

Le script affiche 4.

Vérification : pour $k = 3$, $\tau - 12 = 6h + h^2 \approx 6,001 \times 10^{-3} \geq 10^{-3}$; pour $k = 4$, $\tau - 12 \approx 6 \times 10^{-4} < 10^{-3}$.

Il faut prendre $h = 10^{-4}$ pour que le taux de variation approche $f'(2) = 12$ à moins de 10^{-3} près.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : dérivée, valeur de $f(2)$, tangente en trois temps.
- **Q2** : numérateur **développé**, simplification par h **avant** la limite, différence $6h + h^2$.
- **Q3** : condition de la boucle **correcte** (**while** tant que l'écart est trop grand), valeur **vérifiée** avec deux valeurs de k , interprétation.