

Contrôle : chapitre 3, Dérivation

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (3 points) : Calculs de dérivées

Dans chaque cas, la fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calculer sa dérivée en citant la formule utilisée, puis donner le résultat sous forme développée et réduite (question 1), écrite sous la forme d'un seul quotient (question 2) ou simplifiée (question 3).

1. $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

2. $g(x) = 3x + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

3. $h(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ sur $] -1; +\infty[$. (1 point)

Exercice 2 (5 points) : Nombre dérivé et tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Soit a un réel et h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$, puis en déduire, en justifiant, que f est dérivable en a avec $f'(a) = 6a + 2$. (2 points)
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2. (1,5 points)
3. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d d'équation $y = -4x + 7$? Si oui, donner son abscisse et une équation de cette tangente. (1,5 points)

Exercice 3 (7 points) : Étude d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $I =]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$. (2 points)
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variations de f sur I (on ne demande pas les limites en 2 et en $+\infty$). (2 points)
3. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) - 6 = \frac{(x-3)^2}{x-2}$. En déduire que $f(x) \geq 6$ pour tout $x \in I$, et préciser quand il y a égalité. (2 points)
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. (1 point)

Exercice 4 (5 points) : Coût marginal et bénéfice

Une entreprise fabrique et vend des objets. Pour q objets fabriqués, avec $q \in [0; 100]$, le coût total de fabrication, en euros, est $C(q) = 0,1q^2 + 8q + 120$. Chaque objet est vendu 20 euros ; on suppose que tous les objets fabriqués sont vendus.

1. Calculer $C'(q)$ puis $C'(30)$. Interpréter ce dernier résultat en termes de coût de fabrication. (1,5 points)
2. Calculer $C(31) - C(30)$ et comparer avec le résultat de la question précédente. (0,5 point)
3. Exprimer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q , puis étudier les variations de B sur $[0; 100]$. En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal et la valeur de ce bénéfice maximal. (2 points)
4. On exécute le script Python ci-dessous. Donner, à l'arrondi près, les deux valeurs affichées, puis indiquer vers quel nombre s'approchent les affichages quand le dernier argument diminue, en le justifiant. (1 point)