

Contrôle : chapitre 3, Dérivation

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (3 points) : Calculs de dérivées

Dans chaque cas, la fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calculer sa dérivée en citant la formule utilisée, puis donner le résultat sous forme développée et réduite (question 1), écrite sous la forme d'un seul quotient (question 2) ou simplifiée (question 3).

1. $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

2. $g(x) = 3x + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

3. $h(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ sur $] -1; +\infty[$. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

On pose $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x - 3$, d'où $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$. Comme $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 2x(2x - 3) + 2(x^2 + 1) = 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2.$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 2.$$

Barème : 0,5 point pour la formule du produit avec $u, u'v, v'$; 0,5 point pour le résultat développé et réduit.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

g est la somme de $x \mapsto 3x$, de dérivée 3, et de $x \mapsto 2 \times \frac{1}{x}$, de dérivée $2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ (dérivée de la fonction inverse).

$$g'(x) = 3 - \frac{2}{x^2} = \frac{3x^2 - 2}{x^2}.$$

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2}.$$

Barème : 0,5 point pour la dérivée de la fonction inverse et la linéarité ; 0,5 point pour le résultat sous forme d'un seul quotient.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

On pose $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x + 1$, d'où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$; v ne s'annule pas sur $] -1 ; +\infty[$. Comme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$h'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+2}{(x+1)^2}.$$

$$h'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

Barème : 0,5 point pour la formule du quotient avec u, u', v, v' ; 0,5 point pour le numérateur et le résultat simplifié.

Exercice 2 (5 points) : Nombre dérivé et tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Soit a un réel et h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre a et $a+h$, puis en déduire, en justifiant, que f est dérivable en a avec $f'(a) = 6a + 2$. (2 points)
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2. (1,5 points)
3. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d d'équation $y = -4x + 7$? Si oui, donner son abscisse et une équation de cette tangente. (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

Pour $h \neq 0$: $f(a+h) - f(a) = 3(a+h)^2 + 2(a+h) - 3a^2 - 2a = 3a^2 + 6ah + 3h^2 + 2a + 2h - 3a^2 - 2a = 6ah + 3h^2 + 2h$.

Donc $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h(6a + 3h + 2)}{h} = 6a + 2 + 3h$ (on simplifie par $h \neq 0$).

Quand h tend vers 0, $6a + 2 + 3h$ tend vers le réel $6a + 2$. Le taux de variation a donc une limite finie : f est dérivable en a et

$$f'(a) = 6a + 2.$$

Barème : 1 point pour le développement et la simplification du numérateur ; 0,5 point pour la simplification par $h \neq 0$; 0,5 point pour le passage à la limite et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

$$f(2) = 3 \times 4 + 4 = 16 \text{ et } f'(2) = 6 \times 2 + 2 = 14.$$

$$T : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 14(x - 2) + 16 = 14x - 28 + 16.$$

$$T \text{ a pour équation } y = 14x - 12.$$

Barème : 0,5 point pour $f(2)$ et $f'(2)$; 0,5 point pour la formule de la tangente ; 0,5 point pour l'équation réduite.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Il faut donc $f'(a) = -4$, soit $6a + 2 = -4$, soit $a = -1$.

$$f(-1) = 3 - 2 = 1 \text{ et } f'(-1) = -4 : \text{ la tangente est } y = -4(x + 1) + 1 = -4x - 3.$$

Oui : au point d'abscisse -1 , la tangente a pour équation $y = -4x - 3$.

Barème : 0,5 point pour la condition $f'(a) = -4$ (même pente) ; 0,5 point pour la résolution $a = -1$; 0,5 point pour l'équation de la tangente.

Exercice 3 (7 points) : Étude d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $I =]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$. (2 points)

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variations de f sur I (on ne demande pas les limites en 2 et en $+\infty$). (2 points)

3. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) - 6 = \frac{(x-3)^2}{x-2}$. En déduire que $f(x) \geq 6$ pour tout $x \in I$, et préciser quand il y a égalité. (2 points)

4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = x - 2$, $v'(x) = 1$; v ne s'annule pas sur I , donc f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2-3) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

$$\text{Or } (x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \text{ pour tout } x \in I.$$

Barème : 1 point pour la formule du quotient et le calcul du numérateur ; 0,5 point pour le développement de $(x-1)(x-3)$; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Pour $x \in I$: $(x-2)^2 > 0$ et $x-1 > 1 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x-3$.

$f'(x) < 0$ sur $]2; 3[$, $f'(3) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$. De plus $f(3) = \frac{9-3}{3-2} = 6$.

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	6	$\nearrow$	

f est décroissante sur $]2; 3]$, croissante sur $[3; +\infty[$ et admet un minimum égal à 6 en $x = 3$.

Barème : 1 point pour le signe de $f'(x)$ justifié ; 0,5 point pour $f(3) = 6$; 0,5 point pour le tableau de variations.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (2 points)

$$\text{Pour } x \in I : f(x) - 6 = \frac{x^2 - 3}{x - 2} - \frac{6(x-2)}{x-2} = \frac{x^2 - 3 - 6x + 12}{x-2} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x-2} = \frac{(x-3)^2}{x-2}.$$

Pour $x \in I$, $(x-3)^2 \geq 0$ et $x-2 > 0$: le quotient est positif ou nul.

Donc $f(x) \geq 6$ sur I , avec égalité si et seulement si $x = 3$.

Barème : 1 point pour la mise au même dénominateur et le calcul ; 0,5 point pour le signe du quotient ; 0,5 point pour la conclusion et le cas d'égalité.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

$$f(4) = \frac{16-3}{2} = \frac{13}{2} \text{ et } f'(4) = \frac{3 \times 1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

$$y = \frac{3}{4}(x-4) + \frac{13}{2} = \frac{3}{4}x - 3 + \frac{13}{2}.$$

La tangente a pour équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$.

Barème : 0,5 point pour $f(4)$ et $f'(4)$; 0,5 point pour l'équation réduite.

Exercice 4 (5 points) : Coût marginal et bénéfice

Une entreprise fabrique et vend des objets. Pour q objets fabriqués, avec $q \in [0; 100]$, le coût total de fabrication, en euros, est $C(q) = 0,1q^2 + 8q + 120$. Chaque objet est vendu 20 euros ; on suppose que tous les objets fabriqués sont vendus.

1. Calculer $C'(q)$ puis $C'(30)$. Interpréter ce dernier résultat en termes de coût de fabrication. (1,5 points)
2. Calculer $C(31) - C(30)$ et comparer avec le résultat de la question précédente. (0,5 point)
3. Exprimer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q , puis étudier les variations de B sur $[0; 100]$. En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal et la valeur de ce bénéfice maximal. (2 points)
4. On exécute le script Python ci-dessous. Donner, à l'arrondi près, les deux valeurs affichées, puis indiquer vers quel nombre s'approchent les affichages quand le dernier argument diminue, en le justifiant. (1 point)

Correction de l'exercice 4, question 1

Question 1 (1,5 points)

C est une fonction polynôme, dérivable sur $[0; 100]$, et $C'(q) = 0,1 \times 2q + 8 = 0,2q + 8$.

$$C'(30) = 0,2 \times 30 + 8 = 14.$$

Fabriquer le 31^e objet coûte environ 14 euros (coût marginal).

Barème : 0,5 point pour $C'(q)$; 0,5 point pour $C'(30) = 14$; 0,5 point pour l'interprétation.

Correction de l'exercice 4, question 2

Question 2 (0,5 point)

$$C(31) = 0,1 \times 961 + 248 + 120 = 464,1 \text{ et } C(30) = 0,1 \times 900 + 240 + 120 = 450.$$

$$C(31) - C(30) = 14,1 \text{ euros : proche de } C'(30) = 14 \text{ (écart de 0,1 euro).}$$

Barème : 0,5 point pour le calcul et la comparaison.

Correction de l'exercice 4, question 3

Question 3 (2 points)

Le bénéfice est la recette moins le coût : $B(q) = 20q - C(q) = 20q - 0,1q^2 - 8q - 120 = -0,1q^2 + 12q - 120$.

$B'(q) = -0,2q + 12$, qui est positif si et seulement si $q \leq 60$.

$$B(0) = -120, B(60) = -0,1 \times 3600 + 720 - 120 = 240 \text{ et } B(100) = -1000 + 1200 - 120 = 80.$$

x	0		60		100
$B'(q)$		+	0	-	
B	-120	↗	240	↘	80

Le bénéfice est maximal pour 60 objets fabriqués et vaut alors 240 euros.

Barème : 0,5 point pour l'expression de $B(q)$; 0,5 point pour le signe de $B'(q)$; 0,5 point pour le tableau de variations ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 4, question 4

Question 4 (1 point)

```
def taux(f, a, h):
    return (f(a + h) - f(a)) / h

def C(q):
    return 0.1 * q**2 + 8 * q + 120

print(taux(C, 30, 1))
print(taux(C, 30, 0.001))
```

La fonction `taux` renvoie le taux de variation de C entre 30 et $30 + h$. Le premier affichage est $C(31) - C(30) = 14,1$; le second est $\frac{C(30,001) - C(30)}{0,001} \approx 14,0001$ (à l'arrondi d'affichage des flottants près).

Les affichages s'approchent de 14 , qui est le nombre dérivé $C'(30)$, limite du taux de variation quand h tend vers 0 .

Barème : 0,5 point pour les deux valeurs affichées ; 0,5 point pour la limite $14 = C'(30)$ et sa justification.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	3
Exercice 2	5
Exercice 3	7
Exercice 4	5
Total	20