

Suites numériques : le cours

Une **suite** est une liste de nombres rangés dans l'ordre : le capital d'un livret année après année, la population d'une ville, le nombre de bactéries heure après heure. Les suites servent à **modéliser ce qui évolue par étapes**.

Ce chapitre présente deux familles à connaître par cœur : les **suites arithmétiques** (on ajoute toujours la même chose) et les **suites géométriques** (on multiplie toujours par le même nombre).

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : **arithmétique = différence constante, géométrique = rapport constant**.
- Pour justifier qu'une suite est arithmétique ou géométrique, **écris le calcul** de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Définition et notation

Une **suite numérique** (u_n) associe à chaque entier naturel n un réel u_n , appelé **terme de rang n** .

- u_0 est le **premier terme** (souvent), u_1 le deuxième, etc.
- u_{n+1} est le terme **qui suit** u_n .

Notations. Le terme de rang n se note u_n ou $u(n)$, et la suite entière se note (u_n) ou $(u(n))$. Ce sont les mêmes objets : l'écriture $u(n)$ rappelle qu'une suite est une fonction définie sur les entiers. Par exemple, $u(3) = u_3$.

Pièges de notation :

- u_{n+1} n'est **pas** $u_n + 1$: c'est le terme de rang $n + 1$.
- u_n^2 (le carré du terme) ne se confond pas avec u_{2n} .
- u_{n-1} n'existe que pour $n \geq 1$ si la suite commence à u_0 .

2. Les modes de génération d'une suite

Définition explicite : $u_n = f(n)$. On calcule directement n'importe quel terme.

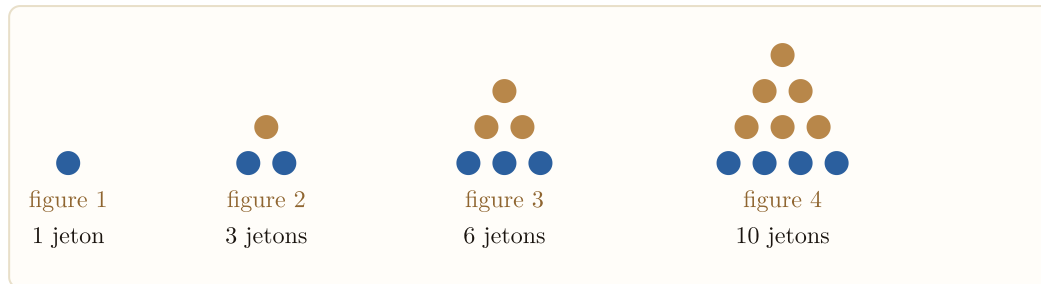
Exemple : $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Alors $u_3 = 18 - 9 + 1 = 10$.

Définition par récurrence : on donne le premier terme et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Il faut calculer les termes **de proche en proche**.

Exemple : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Alors $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, $u_3 = 17$.

Définition par un algorithme : un script qui calcule les termes un à un définit aussi une suite (voir la partie 7).

Définition par un motif géométrique ou un dénombrement : on compte les éléments d'une figure qui dépend de l'entier n . Les jetons ci-dessous forment des triangles ; on note T_n le nombre de jetons de la figure n .



Nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10 jetons

On lit $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ et $T_4 = 10$. Pour passer de la figure n à la figure $n + 1$, on ajoute une rangée (en bleu) de $n + 1$ jetons :

$$T_1 = 1 \quad \text{et} \quad T_{n+1} = T_n + (n + 1)$$

C'est une relation de récurrence. La suite (T_n) n'est ni arithmétique (les écarts valent 2, 3, 4) ni géométrique : ce sont les **nombres triangulaires**.

Passer d'un mode de génération à un autre. On cherche souvent une formule explicite pour une suite donnée par récurrence. L'idée : additionner les écarts $u_{k+1} - u_k$, comme dans la preuve du terme général d'une suite arithmétique.

- Pour (T_n) , on additionne les rangées : $T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Vérification : $T_4 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$.
- Pour $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 2n$, on a $w_{k+1} - w_k = 2k$. En additionnant pour k de 0 à $n - 1$: $w_n - w_0 = 2(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = 2 \times \frac{(n-1)n}{2} = n(n-1)$. Donc $w_n = n^2 - n + 1$. Vérification : $w_4 = 16 - 4 + 1 = 13$.

Ces suites ne sont ni arithmétiques ni géométriques : il n'y a pas de formule à retenir, mais une méthode (additionner les écarts) et le réflexe de **vérifier sur les premiers termes**.

3. Sens de variation

Une suite (u_n) est :

- **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ;
- **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n ;
- **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n .

(Strictement croissante ou décroissante avec des inégalités strictes.)

Méthodes pour étudier le sens de variation :

1. **Signe de $u_{n+1} - u_n$.** On calcule la différence et on étudie son signe.
2. **Quotient** (si tous les termes sont **strictement positifs**) : on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Suite explicite $u_n = f(n)$** : si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
(Réciproque fausse.)

Représentation graphique. On représente une suite par le **nuage de points isolés** $(n; u_n)$, qu'on ne relie pas : une suite n'est définie que pour les entiers. Une suite croissante a ses points qui montent quand on va vers la droite, une suite décroissante a ses points qui descendent.

Dans l'étude d'une suite, on passe sans cesse d'un registre à l'autre : la phrase (« le capital augmente de 50 € par an »), la formule ($u_{n+1} = u_n + 50$) et le nuage de points. Savoir lire un graphique et le traduire en formule fait partie du travail.

4. Suites arithmétiques

Une suite est **arithmétique** de raison r si, pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Terme général : $u_n = u_0 + nr$. Plus généralement $u_n = u_p + (n - p)r$.

Sens de variation : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$.

Somme des termes consécutifs :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Comment prouver qu'une suite est arithmétique ? On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on trouve une **constante**.

Modélisation. Une grandeur qui augmente (ou diminue) de la **même quantité** à chaque étape (accroissements constants) est modélisée par une suite arithmétique : c'est une croissance **linéaire**.

5. Suites géométriques

Une suite est **géométrique** de raison q si, pour tout n , $u_{n+1} = qu_n$.

Terme général : $u_n = u_0 q^n$. Plus généralement $u_n = u_p q^{n-p}$.

Sens de variation (avec $u_0 \neq 0$ et $q > 0$) : $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1)$, dont le signe est celui de $u_0(q - 1)$.

- si $u_0 > 0$: croissante pour $q > 1$, décroissante pour $0 < q < 1$;
- si $u_0 < 0$: décroissante pour $q > 1$, croissante pour $0 < q < 1$;
- si $q = 1$ (ou $u_0 = 0$) : constante.

Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, les termes changent de signe à chaque étape : la suite n'est pas monotone.

Somme des termes consécutifs (pour $q \neq 1$) :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Comment prouver qu'une suite est géométrique ? On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou on écrit $u_{n+1} = q u_n$) et on trouve une **constante**.

Modélisation. Une grandeur qui évolue du **même pourcentage** à chaque étape (taux constant) est modélisée par une suite géométrique : c'est une croissance **exponentielle**. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs est alors constant et vaut q .

Astuce. Pour distinguer les deux familles : on **ajoute** r à chaque étape (arithmétique), on **multiplie** par q (géométrique). Un problème qui parle de « hausse de 5 € par an » est arithmétique ; « hausse de 5 % par an » est géométrique.

6. Évolutions en pourcentage

- Une **hausse** de $t\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Une **baisse** de $t\%$ revient à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Répétée chaque année, une évolution de $t\%$ donne une **suite géométrique** de raison $q = 1 \pm \frac{t}{100}$.

Exemple : 5 000 € placés à 3 % par an : le capital après n années est $C_n = 5\,000 \times 1,03^n$ (intérêts **composés**). Un placement qui rapporte 150 € par an, lui, donne $C_n = 5\,000 + 150n$ (intérêts **simples**, suite arithmétique).

7. Python

```
def terme(n):
    u = 3
    for k in range(n):
        u = 2*u - 1
    return u

def seuil(q, u0, s):
    n = 0
    u = u0
    while u < s:
        u = u * q
        n = n + 1
    return n
```

`terme(3)` renvoie 17. `seuil(1.03, 5000, 10000)` renvoie 24 : le capital double au bout de 24 ans.

Sommes de termes et listes de termes. Pour calculer une somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ou garder tous les termes, on utilise une variable qui s'accumule ou une **liste** à laquelle on ajoute chaque terme avec `append`.

```
def somme(n):
    u = 3
    S = u
    for k in range(n):
        u = 2*u - 1
        S = S + u
    return S

def premiers_termes(n):
    u = 3
    L = [u]
    for k in range(n):
        u = 2*u - 1
        L.append(u)
    return L
```

`somme(3)` renvoie 34 (c'est $3 + 5 + 9 + 17$). `premiers_termes(4)` renvoie `[3, 5, 9, 17, 33]` : le terme u_2 est `L[2]`, qui vaut 9.

8. Les 10 pépites du chapitre

1. $u_{n+1} \neq u_n + 1$: c'est le terme suivant.
2. **Arithmétique** : $u_{n+1} - u_n$ constante. **Géométrique** : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant.
3. **Terme général** : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_0 q^n$ (avec u_p si tu ne pars pas de u_0).
4. **Nombre de termes** dans une somme : dernier rang $-$ premier rang $+1$.
5. **Somme arithmétique** : nombre de termes $\times$ moyenne du premier et du dernier.
6. **Somme géométrique** : $\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ (avec $q \neq 1$).
7. **Sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$.
8. **Hausse de $t\%$** : multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
9. **Seuil** : algorithme avec `while`, ou logarithmes plus tard.
10. **Vérifie** avec $n = 0$ ou $n = 1$.

Démonstrations au programme

Le programme officiel demande de savoir **démontrer** les quatre formules ci-dessous. Chaque preuve est courte : retiens l'idée plutôt que les lignes.

Terme général d'une suite arithmétique. Si $u_{k+1} - u_k = r$ pour tout k , on additionne ces égalités pour k de 0 à $n - 1$:

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = nr$$

Tous les termes intermédiaires se simplifient : il reste $u_n - u_0 = nr$, donc $u_n = u_0 + nr$. $\square$

Terme général d'une suite géométrique. Si $u_{k+1} = q u_k$ pour tout k , on applique cette relation de proche en proche :

$$u_1 = q u_0, \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_0, \quad u_3 = q u_2 = q^3 u_0, \dots$$

À chaque étape, on multiplie par un facteur q de plus : après n étapes, il y a n facteurs q , donc $u_n = u_0 q^n$. $\square$ (On ne divise jamais, donc la preuve vaut aussi si $u_0 = 0$.)

Somme $1 + 2 + \dots + n$. On écrit la somme S deux fois, dans l'ordre puis à l'envers :

$$\begin{array}{ccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

Chaque colonne vaut $n + 1$ et il y a n colonnes : $2S = n(n + 1)$, donc $S = \frac{n(n + 1)}{2}$. $\square$

Somme $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ avec $q \neq 1$. On multiplie la somme S par q :

$$S - qS = (1 + q + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Donc $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ et $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. $\square$

Exemple. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$.

Introduction intuitive de la notion de limite

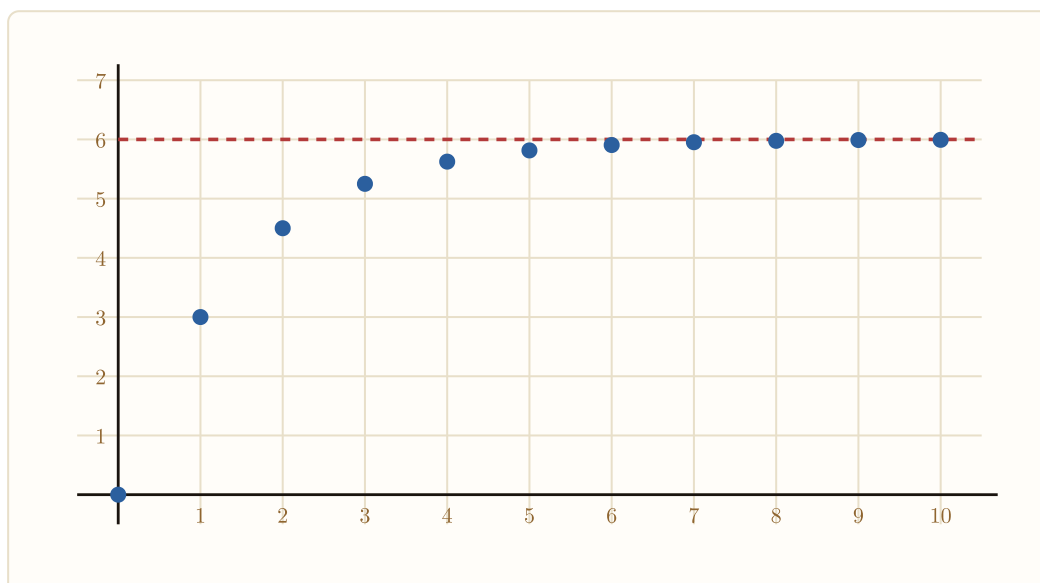
Sur des exemples, on observe ce que deviennent les termes u_n quand n devient très grand. Trois situations se présentent :

- les termes **se rapprochent d'un nombre ℓ** : on parle de limite finie ℓ ;
- les termes **deviennent de plus en plus grands** (limite $+\infty$) ou de plus en plus négatifs (limite $-\infty$) ;
- les termes **ne se stabilisent pas** : il n'y a pas de limite.

En Première, il n'y a pas de définition formelle : on **conjecture** une limite avec un tableau de valeurs, un graphique ou un script, sur des exemples.

- $u_n = \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) : les termes se rapprochent de 0. La limite est 0.
- $u_n = n^2$: les termes deviennent de plus en plus grands. La limite est $+\infty$.
- $u_n = 10 - 3n$: les termes sont de plus en plus négatifs. La limite est $-\infty$.
- $u_n = (-1)^n$: les termes valent tour à tour 1 et -1 . Il n'y a **pas de limite**.
- $u_n = q^n$: avec la calculatrice, $1,1^n$ devient de plus en plus grand (limite $+\infty$) et $0,5^n$ se rapproche de 0 (limite 0).

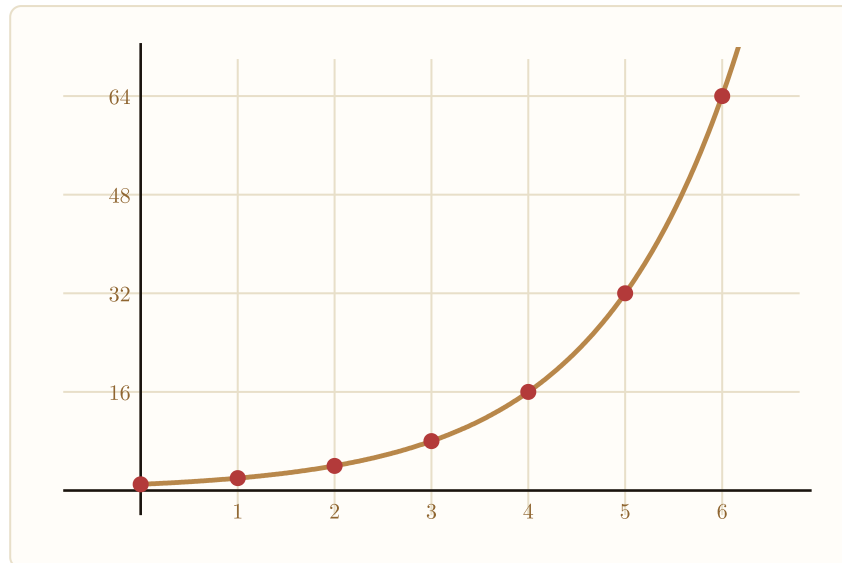
Exemple. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$. Les termes valent 3, 4,5, 5,25, 5,625... et se rapprochent de 6 : on conjecture que la limite est 6.



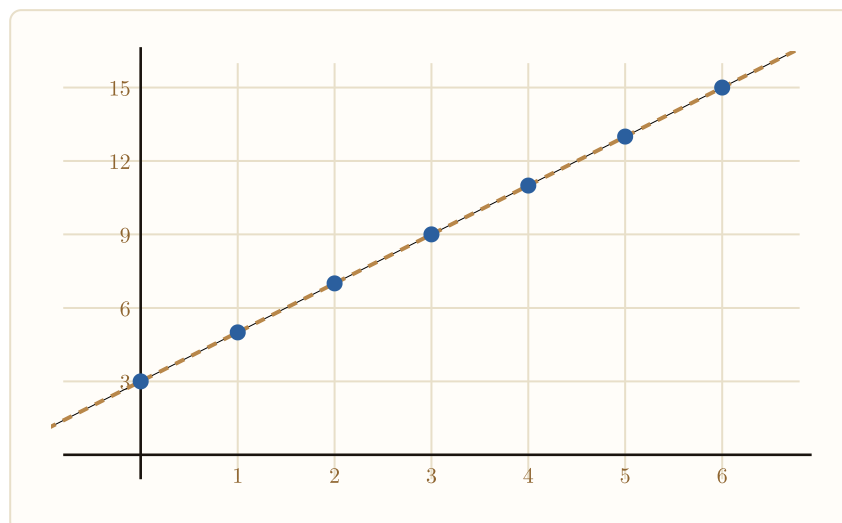
Nuage de points de $u_0=0$, $u_{n+1}=0,5u_n+3$: les points se rapprochent de la droite $y = 6$

Astuce. Pour conjecturer une limite, calcule un terme **très loin** ($n = 50$, $n = 100$) avec la calculatrice ou Python. Si les valeurs se stabilisent, tu tiens la limite ; si elles explosent, c'est $+\infty$.

Lien avec les fonctions affines et la fonction exponentielle



Suite géométrique $v_n = 2^n$: les points suivent une courbe de plus en plus raide



Suite arithmétique $u_n = 3 + 2n$: les points sont alignés

- Une suite **arithmétique** de raison r a ses points $(n; u_n)$ **alignés** sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$ (fonction affine).
- Une suite **géométrique** de raison $q > 0$ a ses points $(n; u_n)$ sur la courbe de la fonction $x \mapsto u_0 q^x$ (fonction exponentielle, vue au chapitre 5).

Exemple. $u_n = 3 + 2n$: les points $(0; 3)$, $(1; 5)$, $(2; 7)$ sont sur la droite $y = 2x + 3$. La suite $v_n = 2^n$ a ses points $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$ sur une courbe qui grimpe de plus en plus vite.

Exemples d'algorithmes : factorielle, Fibonacci, Syracuse

La factorielle $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$:

```
def factorielle(n):
    r = 1
    for k in range(2, n + 1):
        r = r * k
    return r

print(factorielle(5))    # affiche 120
print(factorielle(10))   # affiche 3628800
```

La suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) : on construit la **liste** des premiers termes. On part de $[0, 1]$ et, à chaque tour, on ajoute la somme des deux termes précédents.

```
def fibonacci(n):
    F = [0, 1]
    for k in range(2, n + 1):
        F.append(F[k - 1] + F[k - 2])
    return F

print(fibonacci(9))
# affiche [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]
```

Le terme F_9 est le dernier élément de la liste : `fibonacci(9)[9]` vaut 34.

La suite de Syracuse : si u_n est pair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$; sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$. On conjecture que **tout départ finit par 1**, mais personne ne l'a démontré. Le script renvoie la liste des termes jusqu'à 1.

```
def syracuse(n):
    L = [n]
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = 3 * n + 1
        L.append(n)
    return L

print(syracuse(7))
# affiche [7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
```

Astuce. Le nombre d'étapes de Syracuse est `len(syracuse(n)) - 1` : pour $n = 7$, la liste a 17 éléments, donc il y a 16 étapes.

Un peu d'histoire des suites

- Bien avant d'être étudiées pour elles-mêmes, les suites apparaissent pour **approcher des nombres réels** : Archimède encadre π , et le calcul de racines carrées est associé à Héron d'Alexandrie.
- Elles apparaissent aussi dans des **problèmes de comptage** : les lapins de Fibonacci, dont la suite ci-dessus porte le nom.
- Oresme calcule des sommes de termes de suites géométriques au XIV^e siècle : c'est le type de somme $1 + q + \dots + q^n$ démontré plus haut.
- **Passer d'un mode de génération à un autre** (motif, récurrence, formule explicite) et **lire un nuage de points** (fiche 1).
- Des **algorithmes** : termes, sommes, seuil, listes de termes (fiches 1 à 3).

9. Ce qui peut tomber en contrôle et au bac

- **Calculer des termes**, étudier le **sens de variation** (fiche 1).
- **Reconnaître et exploiter** une suite arithmétique (fiche 2).
- **Reconnaître et exploiter** une suite géométrique, sommes et **modélisation** en pourcentage (fiche 3).
- Des **problèmes concrets** et des **algorithmes de seuil** (exercices de synthèse).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.