

Suites numériques : exercices de synthèse

Quatre exercices complets, au format d'un devoir :

- deux plans d'épargne : un arithmétique, un géométrique, avec un seuil ;
- des bactéries qui se multiplient : évolution en pourcentage et seuil avec Python ;
- un empilement de briques : suite arithmétique et somme.
- des allumettes et un escalier : motifs, dénombrement, relation de récurrence et formule explicite.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- nature de la suite **justifiée** ;
- terme général et somme avec le **bon nombre de termes** ;
- coefficient multiplicateur expliqué ;
- conclusion **en contexte, avec l'unité**.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour chaque suite, écris **d'abord** la relation $u_{n+1} = \dots$ et **nomme** la nature de la suite.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : deux plans d'épargne

Une personne place 1 000 € et hésite entre deux plans.

Plan A : le capital augmente de 50 € chaque année. On note A_n le capital après n années.

Plan B : le capital augmente de 4 % chaque année. On note B_n le capital après n années.

1. Justifier la nature de (A_n) et de (B_n) et exprimer A_n et B_n en fonction de n .
2. Calculer A_{10} et B_{10} . Quel plan est le plus avantageux au bout de 10 ans ?
3. Écrire un script Python qui détermine la première année à partir de laquelle le plan B dépasse le plan A. Donner sa valeur et interpréter.

Correction de la question 1

Chaque année, le capital du plan A augmente de 50 € : $A_{n+1} = A_n + 50$.

(A_n) est arithmétique de raison 50 et de premier terme 1 000 : $A_n = 1\,000 + 50n$.

Une hausse de 4% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,04 : $B_{n+1} = 1,04 B_n$.

(B_n) est géométrique de raison 1,04 et de premier terme 1 000 : $B_n = 1\,000 \times 1,04^n$.

Correction de la question 2

$$A_{10} = 1\,000 + 500 = 1\,500 \text{ €}.$$

$$B_{10} = 1\,000 \times 1,04^{10} \approx 1\,480,24 \text{ €}.$$

Au bout de 10 ans, le plan A est le plus avantageux (1 500 € contre 1 480,24 €).

Correction de la question 3

```
n = 0
while 1000 * 1.04**n <= 1000 + 50*n:
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche **12**.

Vérification : $B_{11} \approx 1\,539,45 < A_{11} = 1\,550$ et $B_{12} \approx 1\,601,03 > A_{12} = 1\,600$.

Le plan B dépasse le plan A à partir de la 12^e année.

Et au-delà ? Pour $n \geq 12$, on compare les accroissements : $A_{n+1} - A_n = 50$ et $B_{n+1} - B_n = 0,04 B_n$. Comme (B_n) est croissante, $B_n \geq B_{12} > 1\,600$, donc $0,04 B_n > 64 > 50$.

L'écart $B_n - A_n$ augmente donc à chaque année à partir de $n = 12$, et il est déjà positif en $n = 12$: le plan B reste plus avantageux pour tout $n \geq 12$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : relation $A_{n+1} = A_n + 50$ et $B_{n+1} = 1,04 B_n$ écrites, nature nommée, termes généraux.
- **Q2** : deux calculs, **comparaison** conclue en contexte.
- **Q3** : condition de la boucle correcte, valeur **vérifiée** par deux termes, interprétation.

Exercice 2 : des bactéries

Une culture contient 2 000 bactéries. Leur nombre augmente de 20 % chaque heure. On note b_n le nombre de bactéries après n heures.

1. Justifier que (b_n) est géométrique. Exprimer b_n .
2. Calculer le nombre de bactéries après 5 heures.
3. Donner le sens de variation de (b_n) .
4. Déterminer, avec un algorithme, au bout de combien d'heures la culture dépasse 10 000 bactéries.

Correction de la question 1

Une hausse de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,2 : $b_{n+1} = 1,2 b_n$.

(b_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme 2 000 : $b_n = 2\,000 \times 1,2^n$.

Correction de la question 2

$$b_5 = 2\,000 \times 1,2^5 = 2\,000 \times 2,48832$$

$$b_5 \approx 4\,977 \text{ bactéries}$$

Correction de la question 3

Le premier terme est positif et la raison $1,2 > 1$.

La suite (b_n) est strictement croissante.

Correction de la question 4

```
n = 0
b = 2000
while b <= 10000:
    b = b * 1.2
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche **9**.

Vérification : $b_8 = 2000 \times 1,2^8 \approx 8600 < 10\,000$ et $b_9 \approx 10\,320 > 10\,000$.

La culture dépasse 10 000 bactéries au bout de 9 heures.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : coefficient multiplicateur expliqué, nature justifiée, terme général.
- **Q2** : calcul et valeur approchée arrondie.
- **Q3** : raison **supérieure à 1** et premier terme **positif** cités.
- **Q4** : algorithme correct, résultat **vérifié** avec deux termes, conclusion en heures.

Exercice 3 : des briques

On empile des briques en rangées.

La première rangée compte 30 briques, et chaque rangée suivante compte 2 briques de moins que la précédente.

On note u_k le nombre de briques de la k -ième rangée ($u_1 = 30$).

1. Justifier que (u_k) est arithmétique et exprimer u_k en fonction de k .
2. Combien de rangées peut-on construire ?
3. Combien de briques y a-t-il dans les 5 premières rangées ?
4. Combien de briques faut-il en tout pour construire toutes les rangées ?

Correction de la question 1

Chaque rangée compte 2 briques de moins que la précédente : $u_{k+1} = u_k - 2$.

(u_k) est arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 30$.

$$u_k = u_1 + (k - 1)r = 30 - 2(k - 1)$$

$$u_k = 32 - 2k$$

Correction de la question 2

Une rangée existe si $u_k > 0$: $32 - 2k > 0 \iff k < 16$. Donc $k \leq 15$. Pour $k = 15$: $u_{15} = 2$, et pour $k = 16$: $u_{16} = 0$.

On peut construire 15 rangées.

Correction de la question 3

Les 5 premières rangées : $u_1, \dots, u_5$ avec $u_5 = 32 - 10 = 22$.

$$S_5 = 5 \times \frac{u_1 + u_5}{2} = 5 \times \frac{30 + 22}{2} = 5 \times 26$$

$S_5 = 130$ briques

Correction de la question 4

Il y a 15 rangées, de $u_1 = 30$ à $u_{15} = 2$ briques.

$$S = 15 \times \frac{30 + 2}{2} = 15 \times 16$$

Il faut 240 briques en tout.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : relation $u_{k+1} = u_k - 2$ écrite, **premier terme au rang 1**, donc $u_k = u_1 + (k - 1)r$.
- **Q2** : condition $u_k > 0$ résolue, dernier rang **entier** donné.
- **Q3 et Q4** : formule de la somme citée, **nombre de termes** juste, valeurs des termes extrêmes.

Exercice 4 : motifs et dénombrement

Partie A : allumettes. On construit des figures avec des allumettes : la figure n est une rangée de n carrés accolés. On note a_n le nombre d'allumettes de la figure n .



figure 1



figure 2



figure 3

Allumettes : n carrés alignés

1. Donner a_1, a_2, a_3 . Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire la nature de la suite (a_n) .
2. Exprimer a_n en fonction de n . Combien d'allumettes faut-il pour 25 carrés ? Avec 301 allumettes, combien de carrés peut-on aligner ?

Partie B : escalier. On construit un escalier avec des carreaux : la figure n a n marches, de hauteurs 1, 2, ..., n carreaux. On note e_n le nombre de carreaux de la figure n .



figure 1



figure 2



figure 3

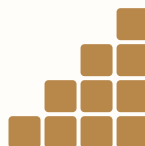


figure 4

Escalier : les figures 1 à 4

3. Donner e_1, e_2, e_3, e_4 . Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n . La suite (e_n) est-elle arithmétique ?
4. Donner une formule explicite de e_n et la démontrer. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit nombre de marches pour avoir plus de 500 carreaux, et le vérifier par le calcul.

Correction de la question 1

Les figures comptent $a_1 = 4$, $a_2 = 7$ et $a_3 = 10$ allumettes. Pour passer de la figure n à la figure $n + 1$, on ajoute un carré : 3 allumettes de plus (une en haut, une en bas, une à droite).

$a_{n+1} = a_n + 3$ pour tout $n \geq 1$: la différence est constante.

(a_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_1 = 4$.

Correction de la question 2

Le premier terme est au rang 1 : $a_n = a_1 + (n - 1)r = 4 + 3(n - 1)$.

$$a_n = 3n + 1.$$

Pour 25 carrés : $a_{25} = 3 \times 25 + 1 = 76$ allumettes.

Avec 301 allumettes : $3n + 1 = 301 \iff n = 100$.

Il faut 76 allumettes pour 25 carrés, et 301 allumettes permettent d'aligner 100 carrés.

Correction de la question 3

On compte $e_1 = 1$, $e_2 = 1 + 2 = 3$, $e_3 = 3 + 3 = 6$ et $e_4 = 6 + 4 = 10$. De la figure n à la figure $n + 1$, on ajoute une marche de hauteur $n + 1$:

$$e_{n+1} = e_n + (n + 1) \text{ avec } e_1 = 1.$$

Les écarts valent 2, 3, 4 : ils ne sont pas constants, donc la suite n'est pas arithmétique (et les quotients 3, 2, $\frac{5}{3}$ ne sont pas constants non plus).

Correction de la question 4

e_n est la somme des hauteurs des marches : $e_n = 1 + 2 + \dots + n$. D'après la formule démontrée dans le cours (somme écrite à l'endroit puis à l'envers) :

$$e_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

```
n = 1
e = 1
while e <= 500:
    n = n + 1
    e = e + n
print(n)
```

Le script affiche 32.

$$\text{Vérification : } e_{31} = \frac{31 \times 32}{2} = 496 \leq 500 \text{ et } e_{32} = \frac{32 \times 33}{2} = 528 > 500.$$

Il faut 32 marches pour dépasser 500 carreaux.

Points clés attendus pour l'exercice 4

- **Q1** : comptage des premières figures, relation $a_{n+1} = a_n + 3$ **écrite** et nature nommée.
- **Q2** : premier terme au rang 1 donc $a_n = a_1 + (n - 1)r$, équation $3n + 1 = 301$ résolue, conclusion en contexte.
- **Q3** : ce qui s'ajoute d'une figure à la suivante, écarts non constants donc **pas arithmétique**.
- **Q4** : formule de $1 + 2 + \dots + n$ citée, script avec **while**, seuil **vérifié** par deux termes.

Les réflexes à retenir

- **Écris la relation** $u_{n+1} = \dots$ avant d'annoncer la nature de la suite.
- **Hausse de $t\%$** : coefficient $1 + \frac{t}{100}$. **Ajout constant** : arithmétique.
- Une suite qui **commence à u_1** : $u_k = u_1 + (k - 1)r$.
- **Nombre de termes** = dernier rang - premier rang + 1.
- Un **seuil** : algorithme avec **while**, **vérifié** par deux termes.
- **Conclus** en contexte, avec l'unité.
- Un **motif** : compte les premières figures, cherche **ce qui s'ajoute** d'une figure à la suivante, puis passe à la formule explicite.