

Suites numériques

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Sens de variation : quatre méthodes

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes.

1. $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $b_n = n^2 - 8n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner aussi la plus petite valeur prise par la suite.
3. $c_0 = 2$ et $c_{n+1} = c_n + n^2 - 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $c_1, \dots, c_6$ pour vérifier la conclusion.
4. $d_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comparer $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ à 1).

Exercice S2 : Une tribune

Une tribune compte 25 rangées de sièges. La première rangée comporte 18 sièges et chaque rangée compte 3 sièges de plus que la précédente. On note u_k le nombre de sièges de la k -ième rangée ($u_1 = 18$).

1. Justifier que (u_k) est arithmétique et exprimer u_k en fonction de k .
2. Calculer le nombre de sièges de la dernière rangée, puis le nombre total de sièges de la tribune.
3. Pour m entier, $1 \leq m \leq 25$, on note S_m le nombre de sièges des m premières rangées. Montrer que $S_m = \frac{m(3m+33)}{2}$.
4. On veut une zone d'au moins 600 sièges composée des premières rangées. Déterminer le nombre minimal de rangées nécessaires.

Exercice S3 : Une suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. On admet que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n . Calculer u_{10} .
4. Étudier le sens de variation de (u_n) .
5. Calculer $T = v_0 + v_1 + \dots + v_{20}$.

Exercice S4 : Dépréciation d'un véhicule

Un véhicule neuf est acheté 24 000 €. Sa valeur baisse de 12 % chaque année. On note V_n sa valeur, en euros, après n années.

1. Justifier que (V_n) est géométrique et exprimer V_n en fonction de n .
2. Calculer la valeur du véhicule après 5 ans (arrondir au centime).
3. Quelle baisse globale, en pourcentage, subit-il en 5 ans ? Arrondir au dixième. Au bout de combien d'années a-t-il perdu plus de la moitié de sa valeur ?
4. Écrire un script Python qui renvoie le nombre d'années au bout duquel la valeur passe sous 8 000 €. Donner la valeur renvoyée et la vérifier par le calcul de deux termes.

Exercice S5 : Un plan d'épargne avec versements

Un épargnant place 5 000 € sur un compte. Chaque année, les intérêts de 2 % sont ajoutés au capital, puis il verse 1 000 €. On note u_n le capital, en euros, après n années ; ainsi $u_0 = 5 000$ et $u_{n+1} = 1,02 u_n + 1 000$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On pose $v_n = u_n + 50 000$. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

3. En déduire que $u_n = 55\,000 \times 1,02^n - 50\,000$, puis calculer u_{10} (arrondir au centime).
4. Montrer que $u_{n+1} - u_n = 1\,100 \times 1,02^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
5. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 30\,000$. Donner la valeur renvoyée.

Exercice S6 : Conjecturer le comportement d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Compléter le script ci-dessous pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 60$.

```
u = 100
n = 0
while ..... :
    u = 0.9 * u + 5
    n = n + 1
print(n)
```

3. Avec Python, on obtient les valeurs approchées $u_{10} \approx 67,43$, $u_{50} \approx 50,26$ et $u_{100} \approx 50,0013$. Quel comportement peut-on conjecturer pour la suite ?
4. Pour confirmer, on pose $w_n = u_n - 50$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison 0,9, puis exprimer u_n en fonction de n . Retrouver la valeur renvoyée par le script de la question 2.

Exercice S7 : Sommes de termes consécutifs

1. Déterminer l'entier naturel n tel que $1 + 2 + \dots + n = 435$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n - 3$. Calculer $u_5 + u_6 + \dots + u_{20}$.
3. Calculer $3 + 6 + 12 + \dots + 3 \times 2^9$.
4. Calculer $2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n > 10\,000$.

Exercice S8 : Démonstration guidée : somme de termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.
2. En écrivant S dans l'ordre croissant des indices, puis dans l'ordre décroissant, et en additionnant, démontrer que $S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
3. Application : (u_n) est arithmétique avec $u_0 = -3$ et $u_{20} = 57$. Calculer sa raison, puis $u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.
4. Calculer la somme de tous les multiples de 7 compris entre 100 et 500.

Exercice S9 : Remboursement d'un prêt

On emprunte 10 000 €. Chaque mois, le capital restant dû augmente de 1 % d'intérêts, puis l'emprunteur verse 500 €. On note C_n le capital restant dû, en euros, après n mensualités : $C_0 = 10\,000$ et $C_{n+1} = 1,01C_n - 500$.

1. On construit les termes dans un tableur : la valeur de C_0 est en cellule B2. Quelle formule saisir en B3 pour pouvoir la recopier vers le bas ?
2. Calculer C_1 , C_2 et C_3 .
3. Montrer que, tant que $C_n < 50\,000$, on a $C_{n+1} < C_n$.
4. Le script suivant renvoie le nombre n de mensualités après lequel le capital restant dû est négatif ou nul.

```
c = 10000
n = 0
```

```

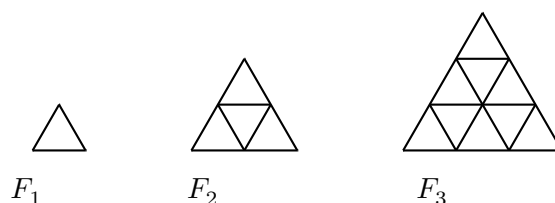
while c > 0:
    c = 1.01 * c - 500
    n = n + 1
print(n)

```

Il renvoie 23. Vérifier ce résultat en calculant C_{22} et C_{23} avec la relation $C_n = 50\,000 - 40\,000 \times 1,01^n$ (admise). Interpréter.

Exercice S10 : Un motif géométrique en allumettes

Pour tout entier $n \geq 1$, la figure F_n est un grand triangle équilatéral de côté n allumettes, entièrement découpé en petits triangles équilatéraux de côté une allumette. On note a_n le nombre d'allumettes de F_n et t_n le nombre de petits triangles de F_n (tous orientés confondus). Les figures F_1 , F_2 et F_3 sont représentées ci-dessous.



1. Compter a_1 , a_2 et t_1 , t_2 , puis donner a_3 et t_3 à partir de F_3 .
2. En comparant F_n et F_{n+1} , justifier que $a_{n+1} = a_n + 3(n+1)$ et que $t_{n+1} = t_n + 2n + 1$ (la rangée ajoutée comporte $n+1$ petits triangles pointe en haut et n pointe en bas).
3. La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Montrer que $a_n = 3(1 + 2 + \dots + n)$, puis que $a_n = \frac{3n(n+1)}{2}$. Calculer a_{20} .
5. Montrer que $t_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$, puis que $t_n = n^2$.
6. On veut une figure contenant au moins 1 000 petits triangles. Déterminer le plus petit entier n convenable et le nombre d'allumettes nécessaires.

Exercice S11 : Listes de termes en Python

1. On considère la fonction suivante.

```

def factorielle(n):
    f = 1
    for k in range(2, n + 1):
        f = f * k
    return f

```

Que renvoient `factorielle(5)` et `factorielle(1)` ? Que vaut $u_n = \text{factorielle}(n)$ en fonction de u_{n-1} pour $n \geq 1$?

2. La fonction suivante renvoie la liste des premiers termes de la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$).

```

def fibo(n):
    L = [0, 1]
    for k in range(2, n + 1):
        L.append(L[k-1] + L[k-2])
    return L

```

Donner `fibo(8)`. Écrire quelques lignes qui affichent le rang du plus petit terme de la liste supérieur à 10 (on parcourra la liste avec une boucle `for k in range(len(L))`).

3. Pour un entier $u_0 \geq 1$, la suite de Syracuse est définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair. Le programme suivant arrête la liste dès qu'elle atteint 1.

```
def syracuse(u0):  
    L = [u0]  
    while L[-1] != 1:  
        if L[-1] % 2 == 0:  
            L.append(L[-1] // 2)  
        else:  
            L.append(3 * L[-1] + 1)  
    return L
```

Donner `syracuse(6)` et le nombre de termes de cette liste. Déterminer de même la liste `syracuse(7)` et sa valeur maximale.

4. Donner la liste affichée par chacune des instructions suivantes (listes définies en compréhension).

```
print([n*n for n in range(1, 6)])  
print([n for n in range(1, 31) if n % 7 == 0])
```

Écrire en une ligne la liste des dix premiers termes $u_0, \dots, u_9$ de la suite définie par $u_n = 3n - 5$.