

Corrigé : Suites numériques**Fiche Standard****S1.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$. Le numérateur vaut $(2n^2 + 5n + 3) - (2n^2 + 5n + 2) = 1$, donc $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

Conclusion : (a_n) est strictement croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 3 - (n^2 - 8n + 3) = n^2 - 6n - 4 - n^2 + 8n - 3 = 2n - 7$. Or $2n - 7 < 0 \iff n \leq 3$ et $2n - 7 > 0 \iff n \geq 4$. Donc $b_0 > b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ puis $b_4 < b_5 < b_6 < \dots$

Conclusion : (b_n) est strictement décroissante jusqu'au rang 4, puis strictement croissante à partir du rang 4 ; elle n'est pas monotone. Sa plus petite valeur est $b_4 = 16 - 32 + 3 = -13$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} - c_n = n^2 - 4n = n(n - 4)$. Cette différence est négative ou nulle pour $0 \leq n \leq 4$ (nulle pour $n = 0$ et $n = 4$) et strictement positive pour $n \geq 5$. Calcul des termes : $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = -5$, $c_4 = -8$, $c_5 = -8$, $c_6 = -3$.

Conclusion : $c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_5$ (avec $c_0 = c_1$ et $c_4 = c_5$), puis (c_n) est strictement croissante à partir du rang 5 ; elle n'est pas monotone.

4. Les termes sont strictement positifs et $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2} > 1$.

Conclusion : (d_n) est strictement croissante.

S2.

1. Chaque rangée compte 3 sièges de plus que la précédente : $u_{k+1} = u_k + 3$. Donc (u_k) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 18$ (premier rang 1) : $u_k = u_1 + (k - 1) \times 3 = 15 + 3k$.

2. $u_{25} = 15 + 75 = 90$. Il y a 25 rangées, de $u_1 = 18$ à $u_{25} = 90$: $S_{25} = 25 \times \frac{18 + 90}{2} = 25 \times 54 = 1\,350$.

Conclusion : la dernière rangée compte 90 sièges et la tribune en compte 1 350 au total.

3. Les m premières rangées vont de u_1 à u_m : il y a m termes. Donc $S_m = m \times \frac{u_1 + u_m}{2} = m \times \frac{18 + 15 + 3m}{2} = \frac{m(3m + 33)}{2}$.

4. On cherche le plus petit entier m tel que $\frac{m(3m + 33)}{2} \geq 600$, soit $3m^2 + 33m - 1\,200 \geq 0$, soit $m^2 + 11m - 400 \geq 0$. Le discriminant est $\Delta = 121 + 1\,600 = 1\,721$; la racine positive est $\frac{-11 + \sqrt{1\,721}}{2} \approx 15,24$. Le trinôme est positif pour $m \geq 15,24$ (avec $m > 0$), donc pour $m \geq 16$. Vérification : $S_{15} = \frac{15 \times 78}{2} = 585 < 600$ et $S_{16} = \frac{16 \times 81}{2} = 648 \geq 600$.

Conclusion : il faut au minimum 16 rangées (soit 648 sièges).

S3.

1. $u_1 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$ et $u_2 = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2/3}{5/3} = \frac{2}{5}$.

2. Les termes u_n sont strictement positifs, donc v_n est bien défini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1 = v_n + 1.$$

Conclusion : (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$.

3. $v_n = \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2}$, donc $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{2n+1}$. Ainsi $u_{10} = \frac{2}{21}$. (Contrôle : $u_1 = \frac{2}{3}$ et $u_2 = \frac{2}{5}$.)

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2n+3} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2(2n+1) - 2(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)} < 0$.

Conclusion : (u_n) est strictement décroissante.

5. Il y a $20 - 0 + 1 = 21$ termes, $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{20} = \frac{1}{2} + 20 = \frac{41}{2} : T = 21 \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{41}{2}}{2} = 21 \times \frac{21}{2} = \frac{441}{2} = 220,5$.

S4.

1. Une baisse de 12 % correspond au coefficient $1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Donc $V_{n+1} = 0,88 V_n$ pour tout n : (V_n) est géométrique de raison 0,88 et de premier terme $V_0 = 24\,000$, et $V_n = 24\,000 \times 0,88^n$.
2. $V_5 = 24\,000 \times 0,88^5 \approx 12\,665,57$. **Conclusion** : après 5 ans, le véhicule vaut environ 12 665,57 €.
3. Le coefficient global est $0,88^5 \approx 0,5277$, soit une baisse de $1 - 0,5277 \approx 47,2\%$. Pour $n = 6$: $0,88^6 \approx 0,4644 < 0,5$, donc la baisse dépasse 50 % (environ 53,6 %), alors que pour $n = 5$ elle ne dépasse pas 50 %.

Conclusion : baisse d'environ 47,2 % en 5 ans ; le véhicule perd plus de la moitié de sa valeur au bout de 6 ans.

4. $n = 0$

$v = 24000$

while $v \geq 8000$:

$v = 0.88 * v$

$n = n + 1$

print(n)

Le script renvoie 9. Vérification : $V_8 = 24\,000 \times 0,88^8 \approx 8\,631,23 \geq 8\,000$ et $V_9 = 24\,000 \times 0,88^9 \approx 7\,595,48 < 8\,000$.

Conclusion : la valeur passe sous 8 000 € au bout de 9 ans.

S5.

1. $u_1 = 1,02 \times 5\,000 + 1\,000 = 6\,100$ et $u_2 = 1,02 \times 6\,100 + 1\,000 = 7\,222$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} + 50\,000 = 1,02 u_n + 51\,000 = 1,02 (u_n + 50\,000) = 1,02 v_n$ (car $1,02 \times 50\,000 = 51\,000$).
3. $v_n = 55\,000 \times 1,02^n$, donc $u_n = v_n - 50\,000 = 55\,000 \times 1,02^n - 50\,000$. Ainsi $u_{10} = 55\,000 \times 1,02^{10} - 50\,000 \approx 17\,044,69$.

Conclusion : (v_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $v_0 = 55\,000$.

Conclusion : après 10 ans, le capital est d'environ 17 044,69 €. (Contrôle : $u_1 = 55\,000 \times 1,02 - 50\,000 = 6\,100$.)

4. $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n = 55\,000 \times 1,02^n \times (1,02 - 1) = 1\,100 \times 1,02^n > 0$.

Conclusion : (u_n) est strictement croissante.

5. $n = 0$

$u = 5000$

while $u < 30000$:

$u = 1.02 * u + 1000$

$n = n + 1$

print(n)

Le script renvoie 19. Vérification : $u_{18} \approx 28\,553,5 < 30\,000$ et $u_{19} \approx 30\,124,6 \geq 30\,000$.

Conclusion : le capital atteint 30 000 € au bout de 19 ans.

S6.

1. $u_1 = 0,9 \times 100 + 5 = 95$; $u_2 = 0,9 \times 95 + 5 = 90,5$; $u_3 = 0,9 \times 90,5 + 5 = 86,45$.
2. La boucle continue tant que $u_n \geq 60$: la condition est $u \geq 60$. Le script renvoie 16.
3. Les termes diminuent et se stabilisent près de 50. On conjecture que la suite est décroissante et tend vers 50.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0,9 u_n + 5 - 50 = 0,9 u_n - 45 = 0,9 (u_n - 50) = 0,9 w_n$. Donc (w_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $w_0 = 50$: $w_n = 50 \times 0,9^n$ et $u_n = 50 + 50 \times 0,9^n$. Comme $0,9^n$ se rapproche de 0, u_n se rapproche de 50 : la conjecture est cohérente. De plus $u_n < 60 \iff 0,9^n < 0,2$; or $0,9^{15} \approx 0,2059 > 0,2$ et $0,9^{16} \approx 0,1853 < 0,2$.

Conclusion : $u_n = 50 + 50 \times 0,9^n$ et le plus petit n tel que $u_n < 60$ est 16, comme le renvoie le script.

S7.

1. $\frac{n(n+1)}{2} = 435 \iff n^2 + n - 870 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 + 3480 = 3481 = 59^2$, donc $n = \frac{-1 \pm 59}{2}$, soit $n = 29$ ou $n = -30$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $n = 29$. Vérification : $\frac{29 \times 30}{2} = 435$.
2. $u_n = 4n - 3$ est arithmétique de raison 4. De u_5 à u_{20} , il y a $20 - 5 + 1 = 16$ termes, $u_5 = 17$ et $u_{20} = 77$: $S = 16 \times \frac{17 + 77}{2} = 8 \times 94 = 752$.
3. Suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2, de $k = 0$ à $k = 9$: 10 termes. $S = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1023 = 3069$.
4. Premier terme $2^3 = 8$, raison 2, exposants de 3 à 10 : 8 termes. $S = 8 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 8 \times 255 = 2040$. (Contrôle : $2^{11} - 2^3 = 2048 - 8 = 2040$.)
5. $1 + 3 + \dots + 3^n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. On cherche $3^{n+1} - 1 > 20\,000$. Or $3^9 = 19\,683$ et $3^{10} = 59\,049$.
Pour $n = 8$: $\frac{19\,683 - 1}{2} = 9\,841 \leq 10\,000$; pour $n = 9$: $\frac{59\,049 - 1}{2} = 29\,524 > 10\,000$.
Conclusion : le plus petit entier n est 9.

S8.

1. Pour $0 \leq k \leq n$: $u_k = u_0 + kr$ et $u_{n-k} = u_0 + (n-k)r$. Donc $u_k + u_{n-k} = 2u_0 + nr = u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n$.
2. On a $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $S = u_n + u_{n-1} + \dots + u_0$. En additionnant terme à terme : $2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_n + u_0)$. D'après la question 1, chacune des $n + 1$ parenthèses vaut $u_0 + u_n$. Donc $2S = (n + 1)(u_0 + u_n)$ et $S = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$.
3. $u_{20} = u_0 + 20r$, donc $57 = -3 + 20r$ et $r = 3$. Alors $S = \frac{21 \times (-3 + 57)}{2} = 21 \times 27 = 567$.
4. Les multiples de 7 compris entre 100 et 500 sont $7 \times 15 = 105, \dots, 7 \times 71 = 497$ (car $7 \times 14 = 98 < 100$ et $7 \times 72 = 504 > 500$). Ce sont les termes $7k$ pour k de 15 à 71, soit $71 - 15 + 1 = 57$ termes d'une suite arithmétique de raison 7 : $S = 57 \times \frac{105 + 497}{2} = 57 \times 301 = 17\,157$.
Conclusion : la somme demandée vaut 17 157.

S9.

1. En B3 : =1,01*B2-500 (avec une virgule décimale dans un tableur en français), puis recopier vers le bas.
2. $C_1 = 1,01 \times 10\,000 - 500 = 9\,600$; $C_2 = 1,01 \times 9\,600 - 500 = 9\,196$; $C_3 = 1,01 \times 9\,196 - 500 = 8\,787,96$.
3. $C_{n+1} - C_n = 0,01 C_n - 500 = 0,01 (C_n - 50\,000)$. Si $C_n < 50\,000$, cette différence est strictement négative.
Conclusion : tant que $C_n < 50\,000$, la suite est strictement décroissante (le remboursement de 500 € dépasse les intérêts, qui valent 100 € le premier mois).
4. $C_{22} = 50\,000 - 40\,000 \times 1,01^{22} \approx 211,37 > 0$ et $C_{23} = 50\,000 - 40\,000 \times 1,01^{23} \approx -286,52 \leq 0$. Le script s'arrête donc à $n = 23$.
Conclusion : le prêt est soldé au bout de 23 mensualités ; la dernière est inférieure à 500 € (environ 213,48 €, soit $1,01 \times C_{22}$).

S10.

1. F_1 : un seul triangle, $a_1 = 3$ et $t_1 = 1$. F_2 : 3 allumettes dans chacune des trois directions, donc $a_2 = 9$, et $t_2 = 4$ petits triangles (3 pointe en haut, 1 pointe en bas). F_3 : 6 allumettes par direction, donc $a_3 = 18$, et $t_3 = 9$ (6 pointe en haut, 3 pointe en bas).
2. Pour passer de F_n à F_{n+1} , on ajoute une rangée de $n + 1$ petits triangles pointe en haut et n pointe en bas. Cette rangée demande $n + 1$ allumettes horizontales et $2(n + 1)$ allumettes obliques, soit $3(n + 1)$ allumettes : $a_{n+1} = a_n + 3(n + 1)$. Elle ajoute $(n + 1) + n = 2n + 1$ petits triangles : $t_{n+1} = t_n + 2n + 1$.

3. $a_2 - a_1 = 6$ et $a_3 - a_2 = 9$: les différences ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique.
 $\frac{a_2}{a_1} = 3$ et $\frac{a_3}{a_2} = 2$: les quotients ne sont pas constants, la suite n'est pas géométrique.
4. Par la relation de la question 2, $a_k - a_{k-1} = 3k$ pour $k \geq 2$; en additionnant pour k de 2 à n et avec $a_1 = 3$: $a_n = 3 + (3 \times 2 + \dots + 3 \times n) = 3(1 + 2 + \dots + n)$. Avec $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$:
 $a_n = \frac{3n(n+1)}{2}$. Donc $a_{20} = \frac{3 \times 20 \times 21}{2} = 630$.
5. De même $t_k - t_{k-1} = 2k - 1$ pour $k \geq 2$ et $t_1 = 1$: $t_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. C'est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de dernier terme $2n - 1$:
 $t_n = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$.
6. $t_n \geq 1000 \iff n^2 \geq 1000$. Comme $31^2 = 961 < 1000$ et $32^2 = 1024 \geq 1000$, le plus petit entier est $n = 32$, avec $a_{32} = \frac{3 \times 32 \times 33}{2} = 1584$ allumettes.

Conclusion : il faut la figure F_{32} (1 024 petits triangles) et 1 584 allumettes.

S11.

1. `factorielle(5)` calcule $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Pour $n = 1$, `range(2, 2)` est vide : `factorielle(1)` renvoie 1. De même `factorielle(0)` renvoie 1. Pour $n \geq 1$, $u_n = n \times u_{n-1}$ (avec $u_0 = 1$) : c'est la suite $n!$.
2. `fibo(8)` renvoie `[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21]`. Pour obtenir le rang du premier terme supérieur à 10 :

```
L = fibo(8)
for k in range(len(L)):
    if L[k] > 10:
        print(k)
        break
```

Le premier terme supérieur à 10 est $13 = F_7$: l'instruction affiche 7.

3. `syracuse(6)` : $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, soit `[6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]`, qui compte 9 termes. `syracuse(7)` : `[7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]`, qui compte 17 termes ; la valeur maximale est 52.
4. La première instruction affiche `[1, 4, 9, 16, 25]` ; la seconde affiche `[7, 14, 21, 28]` (multiples de 7 compris entre 1 et 30). Pour la suite, l'instruction `[3*n - 5 for n in range(10)]` donne :
- `[-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22]`

Conclusion : une liste permet de stocker les premiers termes d'une suite définie par récurrence ou de manière explicite.