

Suites numériques**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations du programme

Rédiger complètement les démonstrations suivantes.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . En additionnant les égalités $u_{k+1} - u_k = r$ pour k allant de 0 à $n-1$, démontrer que $u_n = u_0 + nr$.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$. En multipliant les égalités $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ pour k allant de 0 à $n-1$, démontrer que $u_n = u_0 q^n$. Pourquoi les termes sont-ils tous non nuls ?
3. Démontrer que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.
4. Soit $q \neq 1$. Démontrer que $1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En déduire la valeur de $1-2+4-8+\dots+1\,024$.

Exercice D2 : Trois nombres en progression

1. Trois réels, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Leur somme est 21 et leur produit est 231. Les déterminer (on les notera $a-r, a, a+r$).
2. Trois réels strictement positifs, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Leur somme est 14 et leur produit est 64. Les déterminer (on les notera $\frac{b}{q}, b, bq$).
3. Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Montrer que :
 - a) a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$;
 - b) a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = ac$.
4. Déterminer le réel x pour que $x+1, 2x+1$ et $4x-2$ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, puis le réel $x > 0$ pour que 4, x et 9 soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice D3 : Une suite non monotoneSoit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Calculer $u_0, \dots, u_5$.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = 1 - 2(-1)^n$. Calculer cette différence selon la parité de n et en déduire que (u_n) n'est pas monotone.
3. On pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. Exprimer a_n et b_n en fonction de n et montrer que ces deux suites sont arithmétiques.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_0 + u_1 + \dots + u_{2N+1} = (N+1)(2N+1)$ (regrouper les termes à l'aide de (a_n) et (b_n)). Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{21}$.

Exercice D4 : Un lac à repeupler

Un lac abrite 10 000 poissons. Chaque année, la pêche et la mortalité réduisent la population de 20 %, puis le gestionnaire du lac ajoute 3 000 poissons. On note u_n le nombre de poissons, en milliers, après n années. On admet que le modèle peut fournir des valeurs non entières.

1. Justifier que $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 3$. Calculer u_1 et u_2 .
2. Déterminer le réel c tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - c$ soit géométrique de raison 0,8.
3. En déduire que $u_n = 15 - 5 \times 0,8^n$.
4. Démontrer que (u_n) est strictement croissante, puis que $u_n < 15$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on conjecturer pour la population à long terme ?
5. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 14$. Donner la valeur renvoyée et la vérifier par le calcul de deux termes.

6. Le gestionnaire ajoute désormais a milliers de poissons chaque année ($a > 0$). Déterminer, en fonction de a , le réel c de la question 2. Que vaut-il pour $a = 4$?

Exercice D5 : Un ballon qui rebondit

Un ballon est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 m. Après chaque rebond sur le sol, il remonte à 75 % de la hauteur atteinte précédemment. Pour $k \geq 1$, on note h_k la hauteur maximale, en mètres, atteinte après le k -ième rebond. On note d_n la distance totale parcourue, en mètres, depuis le lâcher jusqu'au moment où le ballon touche le sol pour la $(n + 1)$ -ième fois ; ainsi $d_0 = 2$.

1. Calculer h_1, h_2, h_3 . Montrer que (h_k) est géométrique et exprimer h_k en fonction de k .
2. Calculer d_1 et d_2 .
3. Justifier que $d_n = 2 + 2(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que $d_n = 14 - 12 \times 0,75^n$.
4. Montrer que $d_n < 14$ pour tout n . Que peut-on conjecturer pour la distance totale parcourue ?
5. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $d_n > 13,9$. Donner la valeur renvoyée et la vérifier par le calcul de deux termes.

Exercice D6 : Nombres triangulaires

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ (avec $T_0 = 0$). On rappelle que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Montrer que $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $8T_n + 1 = (2n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit N un entier naturel tel que $8N + 1$ est le carré d'un entier m . Montrer que m est impair, puis que N est un nombre triangulaire.
4. Les nombres 2 145 et 2 000 sont-ils des nombres triangulaires ? Si oui, donner l'entier n tel que T_n est égal à ce nombre.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$.

Exercice D7 : Des versements réguliers

Le 1^{er} janvier de chaque année, une personne verse 1 200 € sur un compte rémunéré à 3 % par an, les intérêts étant ajoutés au capital le 31 décembre. Le premier versement a lieu le 1^{er} janvier de l'année

1. On note S_n le capital, en euros, au 31 décembre de l'année n , intérêts inclus.

1. Calculer S_1 et S_2 .
2. Justifier que la somme versée le 1^{er} janvier de l'année k ($1 \leq k \leq n$) vaut $1\,200 \times 1,03^{n-k+1}$ au 31 décembre de l'année n . En déduire que $S_n = 1\,200(1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^n)$.
3. Montrer que $S_n = 41\,200(1,03^n - 1)$. Vérifier avec S_2 .
4. Calculer S_{10} (arrondir au centime), puis la part des intérêts dans ce capital.
5. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit nombre d'années n tel que $S_n \geq 20\,000$. Donner la valeur renvoyée et la vérifier.

Exercice D8 : Tour de Hanoï et somme des carrés

Partie A : la tour de Hanoï. Un jeu comporte n disques de tailles différentes, empilés par taille décroissante sur un piquet, et deux autres piquets vides. À chaque coup, on déplace un seul disque, sans jamais poser un disque sur un disque plus petit. On note h_n le plus petit nombre de coups pour déplacer la pile entière d'un piquet vers un autre. On admet que, pour $n \geq 1$, le procédé optimal consiste à déplacer les n disques du dessus sur le piquet libre, puis le plus grand disque sur la destination, puis à replacer les n disques sur le plus grand : $h_{n+1} = 2h_n + 1$, avec $h_1 = 1$.

1. Calculer h_2, h_3 et h_4 .
2. On pose $w_n = h_n + 1$. Montrer que (w_n) est géométrique, puis que $h_n = 2^n - 1$.
3. Calculer h_{10} . Déterminer le plus petit entier n tel que $h_n > 10^6$.

Partie B : somme des carrés. On note $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

4. Développer $(k+1)^3 - k^3$. En écrivant cette égalité pour $k = 1, 2, \dots, n$ et en additionnant, montrer

que $(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3(1+2+\dots+n) + n$.

5. En déduire que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $1^2 + 2^2 + \dots + 20^2$.

6. En procédant de la même façon avec $(k+1)^4 - k^4$, montrer que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.