

Corrigé : Suites numériques

Fiche Défi

D1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = r$. En additionnant ces égalités pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ (n égalités) :

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = nr.$$

Dans le membre de gauche, chaque terme u_k avec $1 \leq k \leq n-1$ apparaît une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$: il reste $u_n - u_0$. Donc $u_n - u_0 = nr$, c'est-à-dire $u_n = u_0 + nr$.

2. Comme $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$, chaque terme $u_{k+1} = qu_k$ est non nul si u_k l'est : de proche en proche, tous les termes sont non nuls et les quotients sont définis. En multipliant les égalités $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ pour $k = 0, \dots, n-1$:

$$\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = q^n.$$

Tous les facteurs intermédiaires se simplifient : il reste $\frac{u_n}{u_0} = q^n$, donc $u_n = u_0 q^n$.

3. Soit $S = 1 + 2 + \dots + n$. Écrite dans l'ordre inverse, $S = n + (n-1) + \dots + 1$. En additionnant les deux écritures terme à terme, chacune des n colonnes vaut $n+1$: $2S = n(n+1)$, donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$.
 Puis $1 + 3 + \dots + (2n-1) = (1 + 2 + \dots + 2n) - (2 + 4 + \dots + 2n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2$.
 4. Soit $S = 1 + q + \dots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. En soustrayant, les termes de q à q^n se simplifient : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Application avec $q = -2$ et $n = 10$ (car $1024 = 2^{10} = (-2)^{10}$) : $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1024 = \frac{1 - (-2)^{11}}{1 - (-2)} = \frac{1 + 2048}{3} = 683$.

D2.

1. La somme est $(a-r) + a + (a+r) = 3a = 21$, donc $a = 7$. Le produit est $(7-r) \times 7 \times (7+r) = 7(49 - r^2) = 231$, donc $49 - r^2 = 33$ et $r^2 = 16$, soit $r = 4$ ou $r = -4$.
Conclusion : les nombres sont 3, 7, 11 (si $r = 4$) ou 11, 7, 3 (si $r = -4$). Vérification : $3+7+11 = 21$ et $3 \times 7 \times 11 = 231$.
 2. Le produit est $\frac{b}{q} \times b \times bq = b^3 = 64$, donc $b = 4$. La somme est $\frac{4}{q} + 4 + 4q = 14$, soit $\frac{4}{q} + 4q = 10$.
 En multipliant par $\frac{q}{2} > 0$: $2 + 2q^2 = 5q$, soit $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Le discriminant est $25 - 16 = 9$, donc $q = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $q = \frac{5+3}{4} = 2$. Les deux valeurs sont strictement positives.
Conclusion : les nombres sont 2, 4, 8 (si $q = 2$) ou 8, 4, 2 (si $q = \frac{1}{2}$). Vérification : $2+4+8 = 14$ et $2 \times 4 \times 8 = 64$.
 3. a) Si a, b, c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r , alors $b-a = r = c-b$, donc $2b = a+c$. Réciproquement, si $2b = a+c$, la suite $u_n = a + n(b-a)$ est arithmétique et vérifie $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_2 = 2b - a = c$.
 b) Si a, b, c sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , alors $b = qa$ et $c = qb$, donc $ac = \frac{b}{q} \times qb = b^2$ (avec $q \neq 0$ car $b > 0$). Réciproquement, si $b^2 = ac$, posons $q = \frac{b}{a}$ (défini car $a > 0$) : la suite $u_n = aq^n$ vérifie $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = a\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = c$.
 4. Arithmétique : $2(2x+1) = (x+1) + (4x-2)$, soit $4x+2 = 5x-1$ et $x = 3$. Les termes sont alors 4, 7, 10 (raison 3). Géométrique : $x^2 = 4 \times 9 = 36$ avec $x > 0$, donc $x = 6$. Les termes sont 4, 6, 9 (raison $\frac{3}{2}$).

D3.

- $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 2, u_4 = 5, u_5 = 4$.
- $u_{n+1} - u_n = (n+1) + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 - 2(-1)^n$, car $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$. Si n est pair, cette différence vaut $1 - 2 = -1 < 0$; si n est impair, elle vaut $1 + 2 = 3 > 0$.
Conclusion : la différence change de signe selon la parité de n (par exemple $u_1 < u_0$ et $u_2 > u_1$) : (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
- $a_n = u_{2n} = 2n + (-1)^{2n} = 2n + 1$ et $b_n = u_{2n+1} = 2n + 1 + (-1)^{2n+1} = 2n$. Pour tout n , $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$ et $b_{n+1} - b_n = 2(n+1) - 2n = 2$.
Conclusion : (a_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme 1; (b_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme 0.
- La somme $u_0 + \dots + u_{2N+1}$ regroupe les termes de rang pair, $a_0 + \dots + a_N$, et les termes de rang impair, $b_0 + \dots + b_N$ ($N+1$ termes chacun). $a_0 + \dots + a_N = (N+1) \frac{1 + (2N+1)}{2} = (N+1)^2$ et $b_0 + \dots + b_N = (N+1) \frac{0 + 2N}{2} = N(N+1)$. Donc la somme vaut $(N+1)^2 + N(N+1) = (N+1)(2N+1)$. Pour $u_0 + \dots + u_{21}$, on a $2N+1 = 21$, donc $N = 10$ et la somme vaut $11 \times 21 = 231$.

D4.

- Au départ il y a 10 000 poissons, soit $u_0 = 10$ (en milliers). Une baisse de 20 % multiplie par 0,8, puis on ajoute 3 milliers : $u_{n+1} = 0,8 u_n + 3$. Alors $u_1 = 0,8 \times 10 + 3 = 11$ et $u_2 = 0,8 \times 11 + 3 = 11,8$.
- Pour tout n : $v_{n+1} = u_{n+1} - c = 0,8 u_n + 3 - c = 0,8 (v_n + c) + 3 - c = 0,8 v_n + 3 - 0,2c$. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 si et seulement si $3 - 0,2c = 0$, c'est-à-dire $c = 15$.
- Avec $c = 15$, (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 10 - 15 = -5$. Donc $v_n = -5 \times 0,8^n$ et $u_n = 15 + v_n = 15 - 5 \times 0,8^n$. (Contrôle : $u_1 = 15 - 4 = 11$ et $u_2 = 15 - 3,2 = 11,8$.)
- $u_{n+1} - u_n = -5 \times 0,8^{n+1} + 5 \times 0,8^n = 5 \times 0,8^n (1 - 0,8) = 0,8^n > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante. De plus $5 \times 0,8^n > 0$, donc $u_n = 15 - 5 \times 0,8^n < 15$.

Conclusion : la population augmente chaque année sans jamais atteindre 15 000 poissons; on conjecture qu'elle se rapproche de 15 000.

```
5. def seuil():
    n = 0
    u = 10
    while u <= 14:
        u = 0.8 * u + 3
        n = n + 1
    return n
```

La fonction renvoie 8. Vérification : $u_7 = 15 - 5 \times 0,8^7 \approx 13,95 \leq 14$ et $u_8 = 15 - 5 \times 0,8^8 \approx 14,16 > 14$.

Conclusion : la population dépasse 14 000 poissons au bout de 8 ans.

- Avec $u_{n+1} = 0,8 u_n + a$, la même méthode donne $v_{n+1} = 0,8 v_n + a - 0,2c$, donc $c = 5a$. Pour $a = 4$: $c = 20$.

D5.

- $h_1 = 0,75 \times 2 = 1,5$, $h_2 = 0,75 \times 1,5 = 1,125$, $h_3 = 0,75 \times 1,125 = 0,84375$. Pour tout $k \geq 1$, $h_{k+1} = 0,75 h_k$: la suite est géométrique de raison 0,75. En posant $h_0 = 2$ (hauteur du lâcher), $h_k = 2 \times 0,75^k$.
- Le ballon tombe de 2 m, remonte de $h_1 = 1,5$ m puis retombe de 1,5 m : $d_1 = 2 + 2 \times 1,5 = 5$. Ensuite il remonte de $h_2 = 1,125$ m et retombe : $d_2 = 5 + 2 \times 1,125 = 7,25$.
- Entre le k -ième et le $(k+1)$ -ième contact avec le sol, le ballon monte de h_k puis redescend de h_k , soit $2h_k$. Avec la première chute de 2 m : $d_n = 2 + 2(h_1 + \dots + h_n)$. Les h_k forment une suite géométrique de premier terme $h_1 = 1,5$ et de raison 0,75, avec n termes :

$$h_1 + \dots + h_n = 1,5 \times \frac{1 - 0,75^n}{1 - 0,75} = 6(1 - 0,75^n).$$

Donc $d_n = 2 + 12(1 - 0,75^n) = 14 - 12 \times 0,75^n$. (Contrôle : $d_1 = 14 - 9 = 5$ et $d_2 = 14 - 6,75 = 7,25$.)

- $12 \times 0,75^n > 0$, donc $d_n < 14$. La distance augmente à chaque rebond sans dépasser 14 m; on conjecture que la distance totale se rapproche de 14 m.

5. $n = 0$

$d = 2$

while $d \leq 13.9$:

$n = n + 1$

$d = 14 - 12 * 0.75^n$

print(n)

Le script renvoie 17. Vérification : $d_{16} = 14 - 12 \times 0,75^{16} \approx 13,88 \leq 13,9$ et $d_{17} \approx 13,91 > 13,9$.

Conclusion : la distance parcourue dépasse 13,9 m dès le 18^e contact avec le sol ($n = 17$).

D6.

- $T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2$.
- $8T_n + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.
- Comme $m^2 = 8N + 1$ est impair, m est impair (le carré d'un entier pair est pair). On peut prendre $m \geq 1$: $m = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors $8N + 1 = 4n^2 + 4n + 1$, donc $N = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$.
- Pour 2145 : $8 \times 2145 + 1 = 17161 = 131^2$. Donc $2n + 1 = 131$, $n = 65$, et $T_{65} = \frac{65 \times 66}{2} = 2145$.
Oui, $2145 = T_{65}$. Pour 2000 : $8 \times 2000 + 1 = 16001$ et $126^2 = 15876 < 16001 < 16129 = 127^2$, donc 16001 n'est pas un carré. D'après la question 2, si 2000 était triangulaire, 16001 serait un carré. **Non**, 2000 n'est pas triangulaire.
- $3T_n + T_{n-1} = \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n+3+n-1)}{2} = \frac{n(4n+2)}{2} = n(2n+1)$, et $T_{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$.

D7.

- Le premier versement de 1200 € rapporte 3% au 31 décembre : $S_1 = 1200 \times 1,03 = 1236$. Le 1^{er} janvier suivant, on ajoute 1200 €, puis les intérêts : $S_2 = 1,03 \times (1236 + 1200) = 1,03 \times 2436 = 2509,08$.
- Le versement de l'année k est placé le 1^{er} janvier de l'année k . Il reçoit des intérêts au 31 décembre des années $k, k+1, \dots, n$, soit $n-k+1$ fois, et est multiplié par 1,03 à chaque fois : il vaut $1200 \times 1,03^{n-k+1}$ au 31 décembre de l'année n . En additionnant pour $k = 1, \dots, n$, les exposants $n-k+1$ prennent les valeurs $n, n-1, \dots, 1$: $S_n = 1200 (1,03^n + 1,03^{n-1} + \dots + 1,03)$.
- $1,03 + \dots + 1,03^n = 1,03 (1 + 1,03 + \dots + 1,03^{n-1}) = 1,03 \times \frac{1 - 1,03^n}{1 - 1,03} = 1,03 \times \frac{1,03^n - 1}{0,03}$ (n termes, raison $1,03 \neq 1$). Donc $S_n = \frac{1200 \times 1,03}{0,03} (1,03^n - 1) = 41200 (1,03^n - 1)$. Vérification : $S_2 = 41200 \times (1,0609 - 1) = 41200 \times 0,0609 = 2509,08$.
- $S_{10} = 41200 \times (1,03^{10} - 1) \approx 14169,35$. Le total versé est $10 \times 1200 = 12000$ €, donc les intérêts s'élèvent à environ $14169,35 - 12000 = 2169,35$ €.

Conclusion : après 10 ans, le capital est d'environ 14169,35 €, dont environ 2169,35 € d'intérêts.

5. $n = 1$

$s = 1236$

while $s < 20000$:

$n = n + 1$

$s = 41200 * (1.03^n - 1)$

print(n)

Le script renvoie 14. Vérification : $S_{13} \approx 19303,59 < 20000$ et $S_{14} \approx 21118,70 \geq 20000$.

Conclusion : le capital atteint 20000 € à la fin de la 14^e année.

D8. Partie A.

- $h_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$, $h_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$, $h_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$.
- $w_{n+1} = h_{n+1} + 1 = 2h_n + 2 = 2(h_n + 1) = 2w_n$: (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $w_1 = 2$. Donc $w_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ et $h_n = 2^n - 1$.

3. $h_{10} = 2^{10} - 1 = 1\,023$. On a $2^{19} - 1 = 524\,287 \leq 10^6$ et $2^{20} - 1 = 1\,048\,575 > 10^6$; la suite (h_n) est croissante, donc le plus petit entier est $n = 20$.

Partie B.

4. $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. En additionnant pour k de 1 à n , le membre de gauche se simplifie (chaque cube apparaît une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$, sauf $(n+1)^3$ et -1^3) : $(n+1)^3 - 1$. Le membre de droite vaut $3S_n + 3(1+2+\dots+n) + n$.
5. Avec $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$: $3S_n = (n+1)^3 - 1 - n - \frac{3n(n+1)}{2} = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n^2 + 3n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. D'où $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 20$: $\frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2\,870$.
6. $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. En additionnant pour k de 1 à n et en notant $C_n = 1^3 + \dots + n^3$: $(n+1)^4 - 1 = 4C_n + 6S_n + 4(1+2+\dots+n) + n$. Alors $4C_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$.
D'où $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Conclusion : $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $1^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.