

Corrigé : Suites numériques**Fiche Bases****B1.**

- $u_0 = -2, u_1 = 3 - 2 = 1, u_2 = 12 - 2 = 10, u_3 = 27 - 2 = 25.$
- $u(10) = u_{10} = 3 \times 100 - 2 = 298.$
- $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2 = 3n^2 + 6n + 3 - 2 = 3n^2 + 6n + 1$, alors que $u_n + 1 = 3n^2 - 2 + 1 = 3n^2 - 1$. Ces deux expressions sont différentes : par exemple, $u_1 = 1$ et $u_0 + 1 = -1$. (Elles seraient égales si $6n + 1 = -1$, c'est-à-dire $n = -\frac{1}{3}$, ce qui n'est pas un entier naturel.)
- $u_n = 73 \iff 3n^2 = 75 \iff n^2 = 25 \iff n = 5$ (car $n \in \mathbb{N}$). Vérification : $u_5 = 75 - 2 = 73$.
 $u_n = 50 \iff 3n^2 = 52 \iff n^2 = \frac{52}{3}$, qui n'est pas le carré d'un entier.
Conclusion : 73 est le terme de rang 5 ($u_5 = 73$); 50 n'est pas un terme de la suite.

B2.

- $v_1 = 0,5 \times 4 + 3 = 5; v_2 = 0,5 \times 5 + 3 = 5,5; v_3 = 0,5 \times 5,5 + 3 = 5,75.$
- $w_1 = 2^2 - 1 = 3; w_2 = 3^2 - 1 = 8; w_3 = 8^2 - 1 = 63.$
- $F_2 = 1 + 0 = 1; F_3 = 1 + 1 = 2; F_4 = 2 + 1 = 3; F_5 = 3 + 2 = 5; F_6 = 5 + 3 = 8; F_7 = 8 + 5 = 13.$

B3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = -2 < 0$.
Conclusion : (a_n) est strictement décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N} : b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 > 0$.
Conclusion : (b_n) est strictement croissante. Autre méthode : $b_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + x$, dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x + 1 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui entraîne $f(n+1) > f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on retrouve que (b_n) est strictement croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N} : c_{n+1} - c_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} = \frac{3(n+2) - 3(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)}$. Le numérateur est négatif et le dénominateur est strictement positif, donc cette différence est strictement négative.
Conclusion : (c_n) est strictement décroissante.

B4.

- $u_0 = 7, u_3 = -2, u_6 = 7.$
- $u_n = 2$ pour $n = 1$ et $n = 5$. Vérification : $u_1 = 1 - 6 + 7 = 2$ et $u_5 = 25 - 30 + 7 = 2$.
- Le graphique suggère que la suite décroît de $n = 0$ à $n = 3$, puis croît de $n = 3$ à $n = 6$: elle semble non monotone.
- Pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 7 - (n^2 - 6n + 7) = n^2 - 4n + 2 - n^2 + 6n - 7 = 2n - 5.$$

$$2n - 5 < 0 \iff n \leq 2 \text{ et } 2n - 5 > 0 \iff n \geq 3. \text{ Donc } u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \text{ puis } u_3 < u_4 < u_5 < \dots$$

Conclusion : la suite est strictement décroissante jusqu'au rang 3, puis strictement croissante à partir du rang 3 : elle n'est pas monotone. La conjecture est confirmée, et le minimum est $u_3 = -2$.

B5.

- a) $u_n = u_0 + nr = 7 - 2n$ et $u_{15} = 7 - 30 = -23$.
 b) Il y a $15 - 0 + 1 = 16$ termes : $S = 16 \times \frac{u_0 + u_{15}}{2} = 16 \times \frac{7 - 23}{2} = 16 \times (-8) = -128$.
 c) La raison $r = -2 < 0$: (u_n) est strictement décroissante. De plus, $u_n = -41 \iff 7 - 2n = -41 \iff n = 24$: le terme égal à -41 est u_{24} .
 d) Les points $(n; u_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = 7 - 2x$ (fonction affine de pente $r = -2$ et d'ordonnée à l'origine $u_0 = 7$).
- $v_9 = v_4 + (9 - 4)r$, donc $25 = 10 + 5r$ et $r = 3$. Puis $v_0 = v_4 - 4r = 10 - 12 = -2$.
Conclusion : $r = 3, v_0 = -2$ et $v_n = -2 + 3n$. (Vérification : $v_9 = -2 + 27 = 25$.)

B6.

1. a) $w_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $w_4 = 81 \times \frac{1}{81} = 1$.

b) Il y a $4 - 0 + 1 = 5$ termes et $q = \frac{1}{3} \neq 1$: $S = w_0 \times \frac{1 - q^5}{1 - q} = 81 \times \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = 81 \times \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} = 121$.

Vérification : $81 + 27 + 9 + 3 + 1 = 121$.

c) $w_0 > 0$ et $0 < q < 1$: (w_n) est strictement décroissante.

2. $g_4 = g_2 \times q^2$, donc $80 = 20q^2$ et $q^2 = 4$. Comme $q > 0$, $q = 2$. Puis $g_2 = g_0 \times q^2$ donne $g_0 = \frac{20}{4} = 5$, et $g_7 = 5 \times 2^7 = 640$.

Conclusion : $q = 2$, $g_0 = 5$ et $g_7 = 640$.

B7.

1. $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3$: constante. **Arithmétique** de raison 3.

2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5$: constant. **Géométrie** de raison 5.

3. $w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$: les différences ne sont pas égales ; $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$ rendent impossible une relation $w_1 = q w_0$. **Ni l'une ni l'autre.**

4. $t_{n+1} - t_n = -7$ pour tout n . **Arithmétique** de raison -7 .

5. $s_{n+1} = 0,5 s_n$ pour tout n . **Géométrie** de raison 0,5.

6. $p_0 = 2$, $p_1 = 4$, $p_2 = 10$. Les différences sont 2 et 6 ; les quotients sont 2 et 2,5. Aucune des deux propriétés n'est vérifiée : **ni l'une ni l'autre.**

B8.

1. Hausse de 7 % : $1 + \frac{7}{100} = 1,07$. Baisse de 12 % : $1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Le coefficient 1,25 correspond à une hausse de 25 % ; le coefficient 0,6 à une baisse de 40 %.

2. Prix final : $80 \times 0,85 \times 1,1 = 68 \times 1,1 = 74,8$. Le coefficient global est $0,85 \times 1,1 = 0,935 = 1 - \frac{6,5}{100}$.

Conclusion : le prix final est 74,80 € ; l'évolution globale est une baisse de 6,5 %.

3. Une hausse de 2,5 % correspond au coefficient 1,025, donc $C_{n+1} = 1,025 C_n$ pour tout n : (C_n) est géométrique de raison 1,025 et de premier terme $C_0 = 2000$. Ainsi $C_n = 2000 \times 1,025^n$ et $C_4 = 2000 \times 1,025^4 \approx 2207,63$.

Conclusion : après 4 ans, le capital est d'environ 2 207,63 €.

B9.

1. Les valeurs successives de u sont $2 \rightarrow 5 \rightarrow 14 \rightarrow 41 \rightarrow 122$. Le script affiche 122 : c'est u_4 pour la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

2. La boucle doit continuer tant que $5 \times 1,1^n \leq 20$: la condition est $u \leq 20$. Le script affiche 15. Vérification : $5 \times 1,1^{14} \approx 18,99 \leq 20$ et $5 \times 1,1^{15} \approx 20,89 > 20$.

3. Le script calcule $1 + 3 + 5 + \dots + 19$, somme des 10 premiers nombres impairs. Il affiche 100. Avec la formule : les nombres impairs forment une suite arithmétique de raison 2, il y a 10 termes, donc $S = 10 \times \frac{1 + 19}{2} = 100$.

B10.

1. **Vrai.** $u_{n+1} = u_n + 0,5$ pour tout n : la suite est arithmétique de raison $0,5 > 0$, donc croissante.

2. **Faux.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -2$: la suite est géométrique, mais $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$: elle alterne et n'est pas monotone.

3. **Vrai.** $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$.

4. **Faux.** Il y a $12 - 4 + 1 = 9$ termes.

5. **Faux.** Le coefficient global est $0,5 \times 1,5 = 0,75$: c'est une baisse de 25 % (par exemple $100 \rightarrow 50 \rightarrow 75$).

B11.

1. $a_0 = 1$, $a_9 = \frac{37}{10} = 3,7$, $a_{99} = \frac{397}{100} = 3,97$, $a_{999} = \frac{3997}{1000} = 3,997$. $b_{10} = 100 - 100 = 0$, $b_{100} = 10\,000 - 1\,000 = 9\,000$, $b_{1000} = 1\,000\,000 - 10\,000 = 990\,000$. $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$.
2. (a_n) : les valeurs se rapprochent de 4 sans le dépasser ; on conjecture une limite finie égale à 4. (b_n) : les valeurs deviennent de plus en plus grandes et dépassent tout nombre fixé ; on conjecture une limite infinie $(+\infty)$. (c_n) : les valeurs alternent indéfiniment entre 1 et -1 ; elles ne se rapprochent d'aucun nombre : on conjecture l'absence de limite.
3. On écrit $(4 \cdot n + 1) / (n + 1) \leq 3,93$. Comme $a_n = 4 - \frac{3}{n+1}$, on a $a_n > 3,93 \iff \frac{3}{n+1} < 0,07 \iff n+1 > \frac{3}{0,07} \approx 42,86 \iff n \geq 42$. Le script affiche 42.
4. $a_{41} = \frac{165}{42} \approx 3,9286 \leq 3,93$ et $a_{42} = \frac{169}{43} \approx 3,9302 > 3,93$.

Conclusion : le plus petit entier cherché est $n = 42$.