

Fiche 3 : suites géométriques et modélisation

Onze exercices pour maîtriser les suites géométriques :

- terme général et somme à partir de u_0 et de la raison ;
- retrouver la raison avec deux termes ;
- prouver qu'une suite est géométrique ;
- intérêts composés et durée de doublement ;
- baisse de population et seuil ;
- somme géométrique de raison $\frac{1}{2}$;
- vrai/faux (dont le sens de variation avec $u_0 < 0$) ;
- démontrer la somme $1 + q + \dots + q^n$;
- Python : Fibonacci (avec une liste), Syracuse, factorielle ;
- pour aller plus loin : Hanoï, somme des carrés, emprunt ;
- Python : une somme géométrique et un seuil.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la raison est **justifiée** par $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou par la relation $u_{n+1} = q u_n$;
- le coefficient multiplicateur est **expliqué** ;
- la formule de somme est citée avec le **bon nombre de termes** ;
- la conclusion est **en contexte, avec l'unité**.

Le modèle de rédaction d'une évolution en pourcentage

« Une hausse de 3% correspond à une multiplication par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$. Donc, pour tout n , $C_{n+1} = 1,03 \times C_n$: (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $C_0 = 5\,000$. Ainsi $C_n = 5\,000 \times 1,03^n$. »

- Traduis le pourcentage en **coefficient multiplicateur**.
- Écris $u_{n+1} = q u_n$.
- Donne $u_n = u_0 q^n$ et le premier terme.

Les pièges classiques

- Confondre **hausse de 3 %** ($\times 1,03$) et **multiplier par 0,03**.
- Prendre $1 - \frac{t}{100}$ pour une hausse et $1 + \frac{t}{100}$ pour une baisse.
- Oublier que $1,03^n$ n'est pas $1 + 0,03n$.
- Utiliser la formule de somme avec le **mauvais nombre de termes**.

Ta banque appelle ça « la magie des intérêts composés ». Les intérêts composés, c'est la magie d'une suite géométrique : plus le temps passe, plus l'effet s'emballe.

Exercice 1 (★) : terme général et somme

(u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

1. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_5 .
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_5$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

(u_n) est géométrique : $u_n = u_0 q^n$.

$$u_n = 3 \times 2^n$$

$$u_5 = 3 \times 32$$

$$u_5 = 96$$

Question 2

Il y a $5 - 0 + 1 = 6$ termes. Pour $q = 2 \neq 1$:

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^6}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 64}{1 - 2} = 3 \times 63$$

$$S = 189$$

$$\text{Vérification : } 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$$

Exercice 2 (★★) : deux termes donnés

(v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.

1. Déterminer la raison q et le premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n et calculer v_8 .

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour une suite géométrique, $v_5 = v_2 \times q^{5-2}$, donc $96 = 12q^3$ et $q^3 = 8$. Comme $q > 0$, $q = 2$.

Puis $v_2 = v_0 \times q^2$, donc $v_0 = \frac{12}{4} = 3$.

$$q = 2 \text{ et } v_0 = 3$$

Question 2

$$v_n = 3 \times 2^n$$

$$v_8 = 3 \times 256$$

$$v_8 = 768$$

Exercice 3 (★★) : géométrique ou non ?

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1\,000$ et $u_{n+1} = 0,8 u_n$. Justifier que (u_n) est géométrique, exprimer u_n , calculer u_{10} et donner le sens de variation.
2. La suite $t_n = n \times 2^n$ est-elle géométrique ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour tout n , $u_{n+1} = 0,8 u_n$: (u_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = 1\,000$.

$$u_n = 1\,000 \times 0,8^n$$

$$u_{10} = 1\,000 \times 0,8^{10}$$

$$u_{10} \approx 107,37$$

Comme $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$:

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Question 2

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 8$. Si la suite était géométrique de raison q , on aurait $t_1 = q t_0 = 0$: impossible car $t_1 = 2$.

La suite (t_n) n'est pas géométrique. (De plus, $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2(n+1)}{n}$ dépend de n .)

Exercice 4 (★★) : les intérêts composés

On place 5 000 € à 3 % par an, à intérêts composés. On note C_n le capital, en euros, après n années.

1. Exprimer C_n en fonction de n . Calculer C_{10} .
2. Écrire un script Python qui renvoie le nombre d'années nécessaires pour doubler le capital. Donner sa valeur.
3. Comparer C_{10} à un placement à intérêts simples qui rapporte 150 € par an.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Une hausse de 3 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,03. Donc $C_{n+1} = 1,03 C_n$.

(C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme 5 000 : $C_n = 5\,000 \times 1,03^n$.

$$C_{10} = 5\,000 \times 1,03^{10}$$

$$C_{10} \approx 6\,719,58 \text{ €}$$

Question 2

```
n = 0
capital = 5000
while capital < 10000:
    capital = capital * 1.03
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche **24**.

Vérification : $1,03^{23} \approx 1,974$ donne 9 868 € et $1,03^{24} \approx 2,033$ donne 10 164 €.

Le capital double au bout de 24 ans.

Question 3

À intérêts simples : $5\,000 + 150 \times 10 = 6\,500 \text{ €}$.

Les intérêts composés donnent 6 719,58 € contre 6 500 € : environ 220 € de plus.

Exercice 5 (★★) : une population qui baisse

Une ville compte 200 000 habitants. Sa population baisse de 2 % par an. On note P_n la population après n années.

1. Justifier que (P_n) est géométrique et exprimer P_n .
2. Calculer la population au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années la population passe-t-elle sous 150 000 habitants ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Une baisse de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{2}{100} = 0,98$. Donc $P_{n+1} = 0,98 P_n$.

(P_n) est géométrique de raison 0,98 : $P_n = 200\,000 \times 0,98^n$.

Question 2

$$P_{10} = 200\,000 \times 0,98^{10}$$

$$P_{10} \approx 163\,415 \text{ habitants}$$

Question 3

On cherche le plus petit n tel que $200\,000 \times 0,98^n < 150\,000$, soit $0,98^n < 0,75$. Avec un algorithme :

```
n = 0
p = 200000
while p >= 150000:
    p = p * 0.98
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche **15**.

Vérification : $0,98^{14} \approx 0,7536 > 0,75$ et $0,98^{15} \approx 0,7386 < 0,75$.

La population passe sous 150 000 habitants au bout de 15 ans.

Exercice 6 (★★) : une somme géométrique

Calculer $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^7$.

Correction de l'exercice 6

Ce sont les termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$, de $k = 0$ à $k = 7$: 8 termes.

$$S = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{256}\right) = 2 \times \frac{255}{256}$$

$$S = \frac{255}{128} \approx 1,992$$

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 10 % ramène à la valeur de départ.
2. Une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison q avec $0 < q < 1$ est décroissante.
3. Si $u_{n+1} = qu_n$ avec $q < 0$, la suite est monotone.
4. Une suite géométrique de premier terme $u_0 = -8$ et de raison $q = 0,5$ est décroissante.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Le coefficient global est $0,9 \times 1,1 = 0,99$, soit une baisse de 1 % (par exemple $100 \rightarrow 90 \rightarrow 99$).

Faux.

Affirmation 2

Pour $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1) < 0$.

Vrai.

Affirmation 3

Avec $q < 0$, les termes alternent de signe : la suite n'est pas monotone (sauf si elle est nulle).

Faux.

Affirmation 4

$u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1) = -8 \times 0,5^n \times (-0,5) = 4 \times 0,5^n > 0$. Les termes sont $-8, -4, -2, -1$: ils augmentent vers 0.

Faux : la suite est croissante.

Exercice 8 (★★) : démontrer la somme géométrique

1. Soit $q \neq 1$. Démontrer que $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Calculer $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10}$.
3. Calculer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$ (valeur exacte puis approchée au millième).

Correction de l'exercice 8

Question 1

On note $S = 1 + q + \dots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$.

En soustrayant : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, donc $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Comme $q \neq 1$, $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Question 2

Ici $q = 2$ et $n = 10$: $S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1$.

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = 2047.$$

Question 3

Ici $q = \frac{1}{2}$ et $n = 10$: $S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2048}\right) = \frac{2047}{1024}$.

$S = \frac{2047}{1024} \approx 1,999$. On a $S = 2 - \frac{1}{1024}$: la somme est très proche de 2. En ajoutant des termes, l'écart à 2 est divisé par 2 à chaque fois, ce qui laisse conjecturer que ces sommes se rapprochent de 2.

Exercice 9 (★★) : Python : Fibonacci, Syracuse, factorielle

1. *Les lapins de Fibonacci.* Au mois 1, on a un couple de lapereaux. Un couple devient adulte au bout d'un mois, puis donne naissance à un nouveau couple chaque mois. On note F_n le nombre de couples au mois n . Vérifier que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et justifier que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

2. Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie la liste des termes F_0 à F_n , avec $F_0 = 0$, $F_1 = 1$:

```
def fib(n):
    F = [0, 1]
    for k in range(2, n + 1):
        F.append(...)
    return F
```

3. Que renvoie `fib(9)` ? Quelle est la valeur de F_9 ?

4. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ (avec $0! = 1$).

5. *Suite de Syracuse.* On part de $u_0 = n$; si u_k est pair, $u_{k+1} = \frac{u_k}{2}$, sinon $u_{k+1} = 3u_k + 1$. Écrire une fonction qui renvoie la liste des termes jusqu'à 1. En déduire le nombre d'étapes pour $n = 7$.

Correction de l'exercice 9**Question 1**

Mois 1 : un couple de lapereaux, $F_1 = 1$. Mois 2 : ce couple est adulte, mais n'a pas encore eu de petits, $F_2 = 1$. Mois 3 : il donne naissance à un couple, $F_3 = 2$. Mois 4 : le premier couple donne de nouveau naissance, le second est adulte, $F_4 = 3$.

Au mois $n + 2$, on retrouve tous les couples du mois $n + 1$, plus un nouveau couple pour chaque couple adulte, c'est-à-dire pour chaque couple déjà présent au mois n .

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Question 2

À chaque tour, on ajoute à la liste la somme des deux derniers termes, $F_{k-1} + F_{k-2}$:

```
def fib(n):
    F = [0, 1]
    for k in range(2, n + 1):
        F.append(F[k - 1] + F[k - 2])
    return F
```

Question 3

Les termes sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 : `fib(9)` renvoie la liste [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34].

F_9 est le dernier élément : `fib(9)[9]` vaut 34.

Question 4

```
def factorielle(n):
    p = 1
    for k in range(2, n + 1):
        p = p * k
    return p
```

Pour $n = 0$ ou $n = 1$ la boucle ne s'exécute pas et la fonction renvoie bien 1.

Question 5

```
def syracuse(n):
    L = [n]
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = 3 * n + 1
        L.append(n)
    return L
```

`syracuse(7)` renvoie `[7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]`, soit 17 éléments.

Il y a $17 - 1 = 16$ étapes pour $n = 7$ (`len(syracuse(7)) - 1`).

On ignore si cette boucle s'arrête pour **tous** les entiers : c'est la célèbre conjecture de Syracuse, toujours ouverte.

Exercice 10 (★★★) : pour aller plus loin : Hanoï, carrés, emprunt

1. *Tours de Hanoï.* On note h_n le nombre minimal de déplacements pour transférer n disques. On admet $h_{n+1} = 2h_n + 1$ et $h_0 = 0$. On pose $g_n = h_n + 1$. Montrer que (g_n) est géométrique, en déduire h_n en fonction de n puis calculer h_{10} .

2. *Somme des carrés.* Vérifier en Python que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n = 10$.

```
n = 10
print(sum([k * k for k in range(1, n + 1)]), n * (n + 1) * (2 * n + 1) // 6)
```

3. *Emprunt.* On emprunte 10 000 € à 0,5 % par mois et on rembourse 200 € chaque mois : $d_{k+1} = 1,005 d_k - 200$. Écrire un programme qui renvoie le nombre de mois nécessaires pour solder la dette.

Correction de l'exercice 10

Question 1

$g_{n+1} = h_{n+1} + 1 = 2h_n + 2 = 2(h_n + 1) = 2g_n$: la suite (g_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $g_0 = h_0 + 1 = 1$.

Donc $g_n = 2^n$ et $h_n = 2^n - 1$.

$h_n = 2^n - 1$ et $h_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$.

Question 2

Le programme affiche deux fois le même nombre.

Les deux valeurs sont égales à **385**.

Cela **vérifie** la formule pour $n = 10$ mais ne la démontre pas : la démonstration est un approfondissement, la formule est admise ici.

Question 3

```
d = 10000
mois = 0
while d > 0:
    d = 1.005 * d - 200
    mois = mois + 1
print(mois)
```

Le programme affiche **58** : la dette est soldée au bout de **58** mois (le dernier versement est partiel).

Exercice 11 (★★) : Python : une somme géométrique et un seuil

On note $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 1$. Oresme calculait au XIV^e siècle des sommes de termes de suites géométriques de ce type.

1. Écrire une fonction qui renvoie S_n en additionnant les termes un à un. Calculer S_5 à la main avec la formule et vérifier.
2. Écrire un script qui renvoie le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.
3. Retrouver ce résultat avec la formule de la somme.

Correction de l'exercice 11

Question 1

```
def S(n):
    terme = 0.5
    total = 0
    for k in range(n):
        total = total + terme
        terme = terme / 2
    return total

print(S(5))
```

Le script affiche 0.96875. Avec la formule : S_5 a pour premier terme $\frac{1}{2}$, pour raison $\frac{1}{2}$ et 5 termes, donc $S_5 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875$.

Question 2

```
n = 1
total = 0.5
terme = 0.5
while total <= 0.999:
    terme = terme / 2
    total = total + terme
    n = n + 1
print(n)
```

Le script affiche 10.

Question 3

$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, donc $S_n > 0,999 \iff \frac{1}{2^n} < 0,001 \iff 2^n > 1\,000$.

$2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$.

Le plus petit entier est $n = 10$, comme le donne le script ($S_{10} = 1 - \frac{1}{1024} \approx 0,99902$).

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Prouver** qu'une suite est géométrique et donner son terme général (exercices 1 et 3).
- Un **problème** d'évolution en pourcentage (exercices 4 et 5).
- Une **somme géométrique** (exercices 1 et 6).
- Un **seuil** avec Python (exercices 4 et 5).
- **Démontrer** la somme $1 + q + \dots + q^n$ (exercice 8).
- Des **listes de termes** en Python : Fibonacci, Syracuse (exercice 9), et un seuil sur une somme (exercice 11).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une hausse de **3 %** correspond à une multiplication par :

- A. 1,03 (**bonne réponse**)
- B. 0,03
- C. 1,3
- D. 3

Justification : Hausse de $t\%$: coefficient $1 + \frac{t}{100} = 1,03$.

2. Une suite géométrique a pour premier terme $u_0 = 3$ et pour raison 2. Que vaut u_5 ?

- A. 48
- B. 13
- C. 96 (**bonne réponse**)
- D. 192

Justification : $u_5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$.

3. On place 5 000 € à 3 % par an, à intérêts composés. Le capital après 10 ans est environ :

- A. 5 150 €
- B. 6 720 € (**bonne réponse**)
- C. 8 000 €
- D. 6 500 €

Justification : $5\,000 \times 1,03^{10} \approx 6\,719,58$ €. À intérêts simples, on aurait 6 500 €.

4. Une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 10 % donne au total :

- A. une baisse de 20 %
- B. un retour à la valeur de départ
- C. une hausse de 1 %
- D. **une baisse de 1 % (bonne réponse)**

Justification : Le coefficient global est $0,9 \times 1,1 = 0,99$: une baisse de 1 %.

5. Quelle est la somme $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96$?

- A. 192
- B. 96
- C. 189 (**bonne réponse**)
- D. 93

Justification : Suite géométrique de raison 2, 6 termes : $3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times 63 = 189$.