

Fiche 2 : suites arithmétiques

Neuf exercices pour maîtriser les suites arithmétiques :

- terme général et somme à partir de u_0 et de la raison ;
- retrouver la raison et le terme général avec deux termes ;
- prouver qu'une suite est arithmétique (ou non) ;
- sommes de termes consécutifs ;
- un problème de salaire ;
- vrai/faux ;
- démontrer la somme $1 + 2 + \dots + n$;
- Python : sommes de termes et listes ;
- lire un nuage de points aligné.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le calcul de $u_{n+1} - u_n$ est **écrit** pour prouver qu'une suite est arithmétique ;
- le **nombre de termes** d'une somme est compté avec soin ;
- la formule utilisée est citée ;
- la conclusion est **en contexte**.

Le modèle de rédaction d'une suite arithmétique

« Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 7 - (4n - 7) = 4$. La différence est constante : (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -7$. Donc $u_n = -7 + 4n$. »

- **Prouve** la constance de $u_{n+1} - u_n$ **pour tout** n .
- Donne **la raison** et **le premier terme**.
- **Cite** le terme général $u_n = u_0 + nr$.

Les pièges classiques

- Compter **mal le nombre de termes** : de u_3 à u_{10} , il y a $10 - 3 + 1 = 8$ termes, pas 7.
- Prouver « arithmétique » en calculant **trois termes** : il faut la différence pour **tout** n .
- Utiliser $u_n = u_0 + nr$ quand la suite **commence à** u_1 .

Le nombre de termes, c'est le piège des poteaux et des intervalles : entre deux poteaux, il y a un intervalle, mais entre u_3 et u_{10} , il y a huit termes.

Exercice 1 (★) : terme général et somme

(u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

1. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{10} .
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.
3. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

(u_n) est arithmétique : $u_n = u_0 + nr$.

$$u_n = 5 + 3n$$

$$u_{10} = 5 + 30$$

$$u_{10} = 35$$

Question 2

Il y a $10 - 0 + 1 = 11$ termes. Par la formule de la somme :

$$S = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{5 + 35}{2} = 11 \times 20$$

$$S = 220$$

Question 3

La raison $r = 3 > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2 (★★) : deux termes donnés

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_7 = 23$.

1. Déterminer la raison r et le premier terme u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{20} .
3. Quel est le rang du terme égal à 101 ?

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour une suite arithmétique, $u_7 = u_3 + (7 - 3)r$, donc $23 = 11 + 4r$ et $r = 3$.

Puis $u_3 = u_0 + 3r$, donc $u_0 = 11 - 9 = 2$.

$r = 3$ et $u_0 = 2$

Question 2

$$u_n = 2 + 3n$$

$$u_{20} = 2 + 60$$

$$u_{20} = 62$$

Question 3

$$u_n = 101 \iff 2 + 3n = 101 \iff n = 33.$$

Le terme égal à 101 est u_{33} .

Exercice 3 (★★) : arithmétique ou non ?

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = 4n - 7$

2. $v_n = n^2$

3. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 5$

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 7 - (4n - 7) = 4$.

La suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme -7 .

Question 2

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui dépend de n (par exemple $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$).

La suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Question 3

Par définition, $w_{n+1} = w_n + 5$ pour tout n .

La suite (w_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme 1.

Exercice 4 (★★) : sommes de termes consécutifs

Calculer :

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 100$
2. la somme des 20 premiers nombres impairs $1 + 3 + 5 + \dots + 39$
3. $5 + 8 + 11 + \dots + 50$

Correction de l'exercice 4

Question 1

100 termes, premier terme 1, dernier terme 100 :

$$S = 100 \times \frac{1 + 100}{2}$$

$$S = 5\,050$$

Question 2

Les nombres impairs forment une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Il y a 20 termes, le dernier est 39 :

$$S = 20 \times \frac{1 + 39}{2} = 20 \times 20$$

$$S = 400$$

Question 3

Les termes sont $5 + 3k$. Le dernier est $50 = 5 + 3k$, donc $k = 15$: les termes vont de $k = 0$ à $k = 15$, soit 16 termes.

$$S = 16 \times \frac{5 + 50}{2} = 8 \times 55$$

$$S = 440$$

Exercice 5 (★★) : un salaire

Un employé gagne 1 500 € par mois la première année, puis son salaire mensuel augmente de 40 € chaque année. On note u_n son salaire mensuel, en euros, après n années ($u_0 = 1\,500$).

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et exprimer u_n .
2. Quel est son salaire mensuel après 10 ans ?
3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$ des salaires mensuels des 10 premières années.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Chaque année, le salaire augmente de 40 € : $u_{n+1} = u_n + 40$.

(u_n) est arithmétique de raison 40 et de premier terme 1 500 : $u_n = 1\,500 + 40n$.

Question 2

$$u_{10} = 1\,500 + 400$$

Après 10 ans, le salaire mensuel est de 1 900 €.

Question 3

On additionne les 10 termes $u_0, \dots, u_9$, avec $u_9 = 1\,500 + 360 = 1\,860$:

$$S = 10 \times \frac{1\,500 + 1\,860}{2} = 5 \times 3\,360$$

$$S = 16\,800$$

Interprétation : si l'on additionne le salaire mensuel de chacune des 10 premières années (un mois par année), on obtient 16 800 €.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une suite arithmétique de raison négative est décroissante.
2. Si $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 8$, alors la suite (u_n) est arithmétique.
3. Dans une suite arithmétique, $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n .

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

$u_{n+1} - u_n = r < 0$ pour tout n : la suite est strictement décroissante.

Vrai.

Affirmation 2

Trois termes ne suffisent pas : par exemple, u_3 pourrait valoir 20. Il faut $u_{n+1} - u_n$ constante pour **tout** n .

Faux.

Affirmation 3

C'est la définition : $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n .

Vrai.

Exercice 7 (★★) : démontrer la somme $1 + 2 + \dots + n$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire la somme des 100 premiers entiers, puis $1 + 2 + \dots + n$ pour $n = 2025$.
3. Montrer que $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

On note $S = 1 + 2 + \dots + n$. On l'écrit dans l'autre sens : $S = n + (n-1) + \dots + 1$.

On additionne terme à terme : chaque somme vaut $n+1$ et il y a n colonnes. Donc $2S = n(n+1)$.

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Question 2

Pour $n = 100$: $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$.

Pour $n = 2025$: $\frac{2025 \times 2026}{2} = 2025 \times 1013 = 2\,051\,325$.

5050 et 2 051 325.

Question 3

On factorise par 2 : $2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$.

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1).$$

Exercice 8 (★★) : Python : sommes de termes

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

1. Écrire une fonction `somme(n)` qui renvoie $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en additionnant les termes un à un. Que renvoie `somme(10)` ? Comparer avec l'exercice 1.
2. Construire en compréhension la liste `L` des termes u_0 à u_{10} , puis la parcourir pour en calculer la somme.
3. Écrire un script qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_0 + u_1 + \dots + u_n > 1\,000$. Le vérifier avec la formule de la somme.

Correction de l'exercice 8

Question 1

```
def somme(n):
    u = 5
    S = u
    for k in range(n):
        u = u + 3
        S = S + u
    return S

print(somme(10))
```

Le script affiche 220, ce qui est bien la valeur $S = 220$ obtenue avec la formule à l'exercice 1.

Question 2

```
L = [5 + 3 * k for k in range(11)]
S = 0
for x in L:
    S = S + x
print(L)
print(S)
```

La liste est [5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35] et la somme affichée vaut 220.

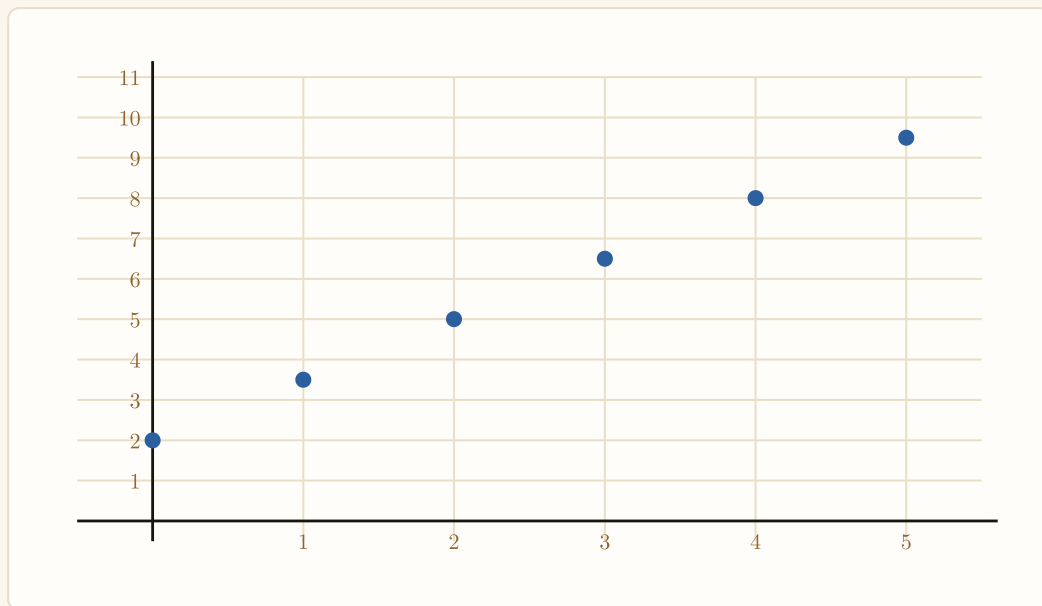
Question 3

```
n = 0
u = 5
S = 5
while S <= 1000:
    n = n + 1
    u = u + 3
    S = S + u
print(n)
```

Le script affiche 24. Vérification avec la formule : $u_0 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{5 + (5+3n)}{2}$.
 Pour $n = 23$: $24 \times \frac{5+74}{2} = 948 \leq 1\,000$. Pour $n = 24$: $25 \times \frac{5+77}{2} = 1\,025 > 1\,000$.
 Il faut additionner les termes jusqu'à u_{24} pour dépasser 1 000.

Exercice 9 (★★) : lire un nuage de points aligné

Le graphique représente les premiers termes d'une suite (a_n) .



Les premiers termes de (a_n) : points $(n ; a_n)$ pour n de 0 à 5

1. Lire a_0 , a_1 et a_2 .
2. Que remarque-t-on sur les points ? Quelle nature de suite peut-on conjecturer ? Quelle est sa raison ?
3. Donner a_n en fonction de n , calculer a_{20} , puis donner l'équation de la droite qui porte les points.
4. Prouver par le calcul que la suite est arithmétique.

Correction de l'exercice 9

Question 1

On lit $a_0 = 2$, $a_1 = 3,5$ et $a_2 = 5$.

Question 2

Les points semblent alignés : on conjecture une suite arithmétique. On passe de chaque point au suivant en montant de 1,5.

On conjecture une suite arithmétique de raison 1,5.

Question 3

$$a_n = a_0 + nr = 2 + 1,5n \text{ et } a_{20} = 2 + 1,5 \times 20 = 32.$$

$a_n = 2 + 1,5n$, $a_{20} = 32$, et les points sont sur la droite d'équation $y = 1,5x + 2$ (fonction affine).

Question 4

On suppose que $a_n = 2 + 1,5n$ pour tout n . Alors $a_{n+1} - a_n = 2 + 1,5(n+1) - (2 + 1,5n) = 1,5$, constant.

La suite (a_n) est arithmétique de raison 1,5. (Le graphique ne prouvait que la conjecture.)

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Prouver** qu'une suite est arithmétique et donner son terme général (exercices 1 et 3).
- **Retrouver** la raison avec deux termes (exercice 2).
- Une **somme** avec le bon nombre de termes (exercice 4).
- Un **problème** de salaire ou de progression (exercice 5).
- **Démontrer** la somme $1 + 2 + \dots + n$ (exercice 7).
- Calculer une **somme** avec Python, avec une liste (exercice 8).
- **Lire un nuage de points** et conjecturer la raison (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une suite arithmétique a pour premier terme $u_0 = 5$ et pour raison 3. Que vaut u_{10} ?

- A. 30
- B. 53
- C. 38
- D. 35 (bonne réponse)

Justification : $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$, donc $u_{10} = 35$.

2. Pour une suite arithmétique, $u_3 = 11$ et $u_7 = 23$. Que vaut la raison ?

- A. 4
- B. 3 (bonne réponse)
- C. 6
- D. 12

Justification : $u_7 = u_3 + 4r$, donc $23 = 11 + 4r$ et $r = 3$.

3. Que vaut $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?

- A. 10 100
- B. 5 000
- C. 5 050 (**bonne réponse**)
- D. 5 100

Justification : $100 \times \frac{1 + 100}{2} = 5\,050$.

4. Combien y a-t-il de termes dans la somme $u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$?

- A. 9
- B. 7
- C. 8 (**bonne réponse**)
- D. 10

Justification : Nombre de termes = dernier rang – premier rang + 1 = $10 - 3 + 1 = 8$.

5. Une suite vérifie $u_{n+1} - u_n = -2$ pour tout n . C'est :

- A. une suite arithmétique croissante
- B. **une suite arithmétique décroissante (bonne réponse)**
- C. une suite non monotone
- D. une suite géométrique de raison -2

Justification : La différence est constante : la suite est arithmétique de raison $-2 < 0$, donc décroissante.