

Fiche 1 : généralités et sens de variation

Onze exercices pour maîtriser les généralités sur les suites :

- calculer des termes (explicite et récurrence) ;
- étudier le sens de variation avec le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis avec le quotient ;
- une suite explicite non monotone ;
- une suite définie par récurrence : variation et nuage de points ;
- un seuil, avec Python ;
- vrai/faux ;
- conjecturer une limite ;
- des motifs et du dénombrement : relation de récurrence et formule explicite ;
- lire un nuage de points et passer d'un registre à l'autre ;
- de la récurrence à la formule explicite ;
- une suite qui approche $\sqrt{2}$: conjecturer une limite avec une liste.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le calcul de $u_{n+1} - u_n$ est **écrit en entier** ;
- le signe est **justifié** ;
- la conclusion nomme le **sens de variation** ;
- les résultats sont **vérifiés** avec des termes calculés.

Le modèle de rédaction d'un sens de variation

« Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3 > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante. »

- Écris $u_{n+1} - u_n$ avec les deux termes **remplacés** et simplifie.
- **Justifie le signe** pour **tout** entier n .
- **Conclus** : « strictement croissante », « décroissante », ou « non monotone ».

Les pièges classiques

- Confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.
- Justifier une variation **avec quelques termes seulement** : ce n'est pas une preuve.
- Oublier de **remplacer n par $n+1$ partout** dans u_{n+1} .

Vérifier trois termes, c'est comme goûter la soupe avec une cuillère : ça donne une idée, mais ça ne prouve rien sur toute la marmite.

Exercice 1 (★) : calculer des termes

1. Soit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 .
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Calculer v_1, v_2, v_3 .
3. Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 2n$. Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 .

Exercice 2 (★★) : sens de variation

Étudier le sens de variation de chaque suite :

1. $u_n = 3n + 2$
2. $v_n = \frac{2}{n+1}$
3. $w_n = n^2 - 6n$

Exercice 3 (★★) : par le quotient

On considère les suites définies par $u_n = 5 \times 1,2^n$ et $v_n = \frac{4}{3^n}$.

Étudier le sens de variation de (u_n) et de (v_n) en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (puis $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1).

Exercice 4 (★★) : une récurrence

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Étudier le sens de variation de (u_n) .
3. Représenter dans un repère les points $(n; u_n)$ pour n de 0 à 4. Que constates-tu ?

Exercice 5 (★★) : un seuil avec Python

On considère la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.

1. Écrire un script qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.
2. Quelle valeur renvoie-t-il ? Le vérifier par le calcul.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

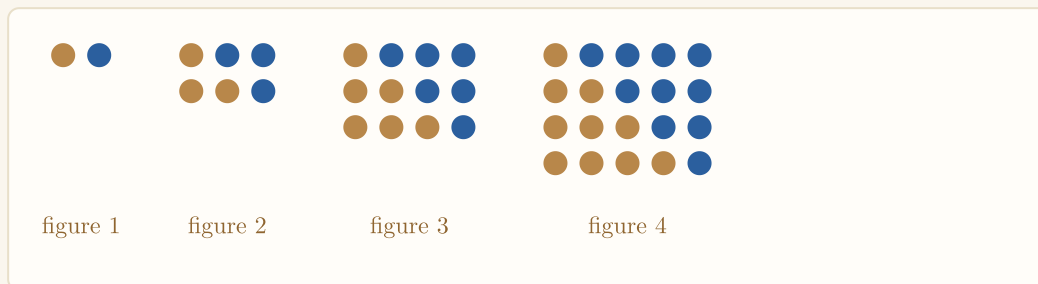
1. Si $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$, alors la suite (u_n) est croissante.
2. Si $u_{n+1} - u_n = -3$ pour tout n , alors (u_n) est décroissante.
3. La suite $u_n = (-1)^n$ est décroissante.

Exercice 7 (★★) : conjecturer une limiteOn définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ pour tout entier n .

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Quelle limite peut-on conjecturer pour (u_n) ?
3. Écrire un script Python qui affiche u_{15} .

Exercice 8 (★★) : motifs et dénombrement

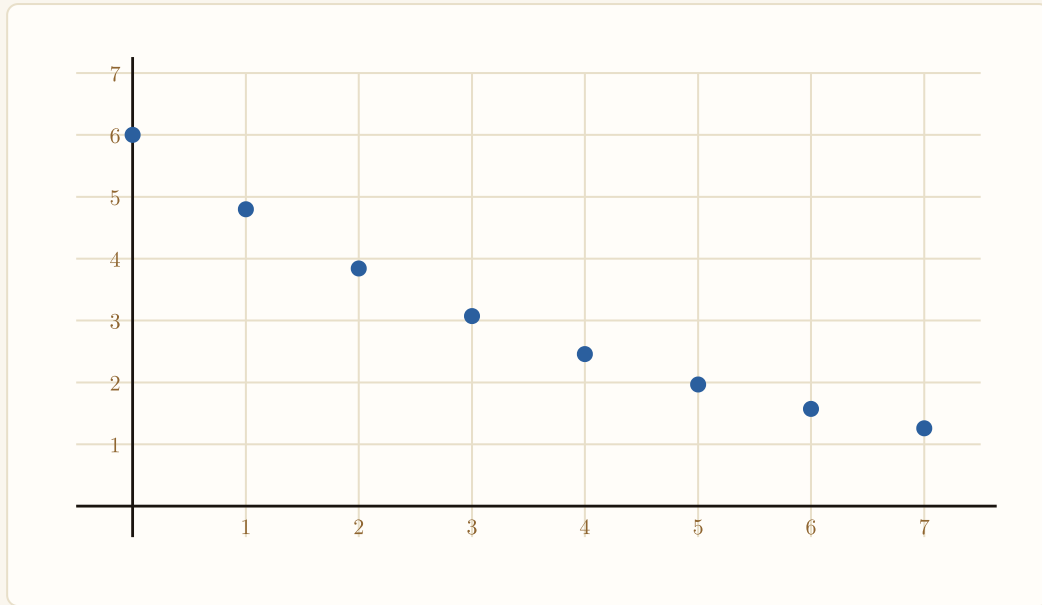
Des jetons sont disposés en rectangles : la figure n compte n lignes et $n + 1$ colonnes. On note r_n le nombre de jetons de la figure n .

Rectangles de jetons : n lignes et $n+1$ colonnes

1. Donner r_1, r_2, r_3 et r_4 .
2. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n .
3. Donner une formule explicite de r_n . La suite (r_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Dans un groupe de n personnes, chacune serre la main de chacune des autres, une seule fois. On note p_n le nombre de poignées de main. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 . Combien de poignées s'ajoutent quand une $(n + 1)$ -ième personne arrive ? En déduire une formule explicite de p_n puis p_{30} .

Exercice 9 (★★) : lire un nuage de points

Le graphique représente les premiers termes d'une suite (v_n) .



Les premiers termes de (v_n) : points $(n ; v_n)$ pour n de 0 à 7

1. Lire (valeurs approchées) v_0 , v_1 et v_2 .
2. Quel sens de variation conjecturer ? Quelle limite ?
3. Calculer $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$ avec les valeurs lues. On admet que (v_n) est géométrique : donner v_n en fonction de n , puis calculer v_7 et le comparer au graphique.
4. Traduire en une phrase l'évolution d'un terme au suivant.

Exercice 10 (★★) : de la récurrence à la formule explicite

On reprend la suite de l'exercice 4 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

1. Écrire $u_{k+1} - u_k$ pour $k = 0, 1, 2$, puis additionner ces écarts pour k de 0 à $n - 1$. En déduire une formule explicite de u_n .
2. Vérifier la formule avec u_4 , puis calculer u_{20} .
3. Retrouver le sens de variation de (u_n) à partir de la formule explicite.

Exercice 11 (★★) : une suite qui approche $\sqrt{2}$

On définit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. Ce type de suite sert à calculer des racines carrées : le programme cite Héron d'Alexandrie à ce sujet.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs exactes puis décimales).
2. Écrire un script qui construit la liste des six premiers termes. Quelle limite peut-on conjecturer ?
3. Avec la calculatrice, calculer u_3^2 . Que remarque-t-on ?

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Calculer des termes** en explicite et en récurrence (exercice 1).
- Étudier le **sens de variation** avec $u_{n+1} - u_n$ ou le quotient (exercices 2, 3, 4).
- Un **seuil** avec Python (exercice 5).
- Conjecturer une **limite** (exercices 7 et 11).
- **Motifs et dénombrement**, de la récurrence à la formule explicite (exercices 8 et 10).
- **Lire un nuage de points** (exercices 4 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Soit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Que vaut u_3 ?
 - A. 12
 - B. 10
 - C. 7
 - D. 9
2. Soit $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Que vaut v_3 ?
 - A. 15
 - B. 11
 - C. 25
 - D. 17
3. Pour prouver qu'une suite est croissante, on étudie souvent :
 - A. le signe de $u_{n+1} - u_n$
 - B. la parité de n
 - C. la valeur de u_0
 - D. le signe de u_n

4. La suite $w_n = n^2 - 6n$ est :
- A. constante
 - B. décroissante jusqu'au rang 3 puis croissante
 - C. croissante
 - D. décroissante
5. Dans une suite, que désigne u_{n+1} ?
- A. le nombre $u_n + 1$
 - B. le carré de u_n
 - C. le produit $u_n \times (n + 1)$
 - D. le terme de rang $n + 1$