

Fiche 1 : généralités et sens de variation

Onze exercices pour maîtriser les généralités sur les suites :

- calculer des termes (explicite et récurrence) ;
- étudier le sens de variation avec le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis avec le quotient ;
- une suite explicite non monotone ;
- une suite définie par récurrence : variation et nuage de points ;
- un seuil, avec Python ;
- vrai/faux ;
- conjecturer une limite ;
- des motifs et du dénombrement : relation de récurrence et formule explicite ;
- lire un nuage de points et passer d'un registre à l'autre ;
- de la récurrence à la formule explicite ;
- une suite qui approche $\sqrt{2}$: conjecturer une limite avec une liste.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le calcul de $u_{n+1} - u_n$ est **écrit en entier** ;
- le signe est **justifié** ;
- la conclusion nomme le **sens de variation** ;
- les résultats sont **vérifiés** avec des termes calculés.

Le modèle de rédaction d'un sens de variation

« Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3 > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante. »

- Écris $u_{n+1} - u_n$ avec les deux termes **remplacés** et simplifie.
- **Justifie le signe** pour **tout** entier n .
- **Conclus** : « strictement croissante », « décroissante », ou « non monotone ».

Les pièges classiques

- Confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.
- Justifier une variation **avec quelques termes seulement** : ce n'est pas une preuve.
- Oublier de **remplacer n par $n+1$ partout** dans u_{n+1} .

Vérifier trois termes, c'est comme goûter la soupe avec une cuillère : ça donne une idée, mais ça ne prouve rien sur toute la marmite.

Exercice 1 (★) : calculer des termes

1. Soit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 .
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Calculer v_1, v_2, v_3 .
3. Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 2n$. Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 .

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$u_2 = 8 - 6 + 1 = 3$$

$$u_3 = 18 - 9 + 1 = 10$$

Question 2

$$v_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$v_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$v_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

Question 3

$$w_1 = w_0 + 2 \times 0 = 1$$

$$w_2 = w_1 + 2 \times 1 = 3$$

$$w_3 = w_2 + 2 \times 2 = 7$$

$$w_4 = w_3 + 2 \times 3 = 13$$

Exercice 2 (★★) : sens de variation

Étudier le sens de variation de chaque suite :

$$1. u_n = 3n + 2$$

$$2. v_n = \frac{2}{n+1}$$

$$3. w_n = n^2 - 6n$$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3 > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$. Le numérateur est négatif et le dénominateur est strictement positif.

La suite (v_n) est strictement décroissante.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - (n^2 - 6n) = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 - n^2 + 6n = 2n - 5$.

$2n - 5 < 0$ pour $n \leq 2$ et $2n - 5 > 0$ pour $n \geq 3$. Les premiers termes sont 0, -5, -8, -9, -8, -5, 0.

La suite (w_n) est strictement décroissante jusqu'au rang 3, puis strictement croissante : elle n'est pas monotone.

Exercice 3 (★★) : par le quotient

On considère les suites définies par $u_n = 5 \times 1,2^n$ et $v_n = \frac{4}{3^n}$.

Étudier le sens de variation de (u_n) et de (v_n) en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (puis $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1).

Correction de l'exercice 3

Les termes de (u_n) et de (v_n) sont strictement positifs.

La suite (u_n)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 1,2^{n+1}}{5 \times 1,2^n} = 1,2 > 1.$$

(u_n) est strictement croissante.

La suite (v_n)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4/3^{n+1}}{4/3^n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

(v_n) est strictement décroissante.

Exercice 4 (★★) : une récurrence

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Étudier le sens de variation de (u_n) .
3. Représenter dans un repère les points $(n; u_n)$ pour n de 0 à 4. Que constates-tu ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

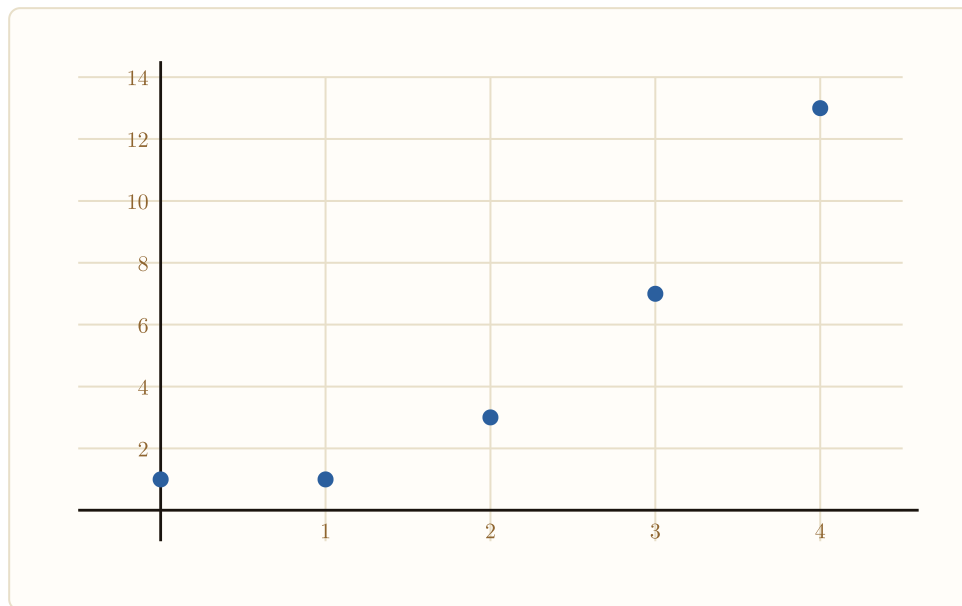
$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 13$ (exercice 1, question 3).

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$.

La suite (u_n) est croissante. (Elle est même strictement croissante à partir du rang 1 : $u_1 = u_0$ mais $u_2 > u_1$.)

Question 3



Les points $(n; u_n)$ pour n de 0 à 4

Les points ne sont pas alignés : ils montent de plus en plus vite, car les écarts $u_{n+1} - u_n = 2n$ valent 0, 2, 4, 6. La suite n'est donc pas arithmétique.

On voit bien sur le nuage de points le sens de variation trouvé à la question 2 : les points ne descendent jamais.

Exercice 5 (★★) : un seuil avec Python

On considère la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.

1. Écrire un script qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.
2. Quelle valeur renvoie-t-il ? Le vérifier par le calcul.

Correction de l'exercice 5

Question 1

```
n = 0
while 2*n**2 - 3*n + 1 <= 100:
    n = n + 1
print(n)
```

Question 2

Le script affiche **8**.

Vérification : $u_7 = 98 - 21 + 1 = 78 \leq 100$ et $u_8 = 128 - 24 + 1 = 105 > 100$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$, alors la suite (u_n) est croissante.
2. Si $u_{n+1} - u_n = -3$ pour tout n , alors (u_n) est décroissante.
3. La suite $u_n = (-1)^n$ est décroissante.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Le sens de variation se démontre **pour tout** n , pas sur quelques termes. Contre-exemple : $u_n = -(n-3)^2$ donne $u_0 = -9 < u_1 = -4 < u_2 = -1 < u_3 = 0$, mais $u_4 = -1 < u_3$: la suite n'est pas croissante.

Faux.

Affirmation 2

$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ pour tout n : la suite est strictement décroissante.

Vrai.

Affirmation 3

$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1$: elle alterne. Elle n'est ni croissante ni décroissante.

Faux.

Exercice 7 (★★) : conjecturer une limite

On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$ pour tout entier n .

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Quelle limite peut-on conjecturer pour (u_n) ?
3. Écrire un script Python qui affiche u_{15} .

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$u_1 = 0,5 \times 0 + 3 = 3.$$

$$u_2 = 0,5 \times 3 + 3 = 4,5.$$

$$u_3 = 0,5 \times 4,5 + 3 = 5,25 \text{ et } u_4 = 0,5 \times 5,25 + 3 = 5,625.$$

$$u_1 = 3, u_2 = 4,5, u_3 = 5,25 \text{ et } u_4 = 5,625.$$

Question 2

Les termes augmentent, mais de moins en moins : l'écart à 6 est divisé par 2 à chaque étape ($6 - 3 = 3, 6 - 4,5 = 1,5, 6 - 5,25 = 0,75$).

On conjecture que la suite tend vers 6.

Question 3

On répète 15 fois le calcul de la relation de récurrence :

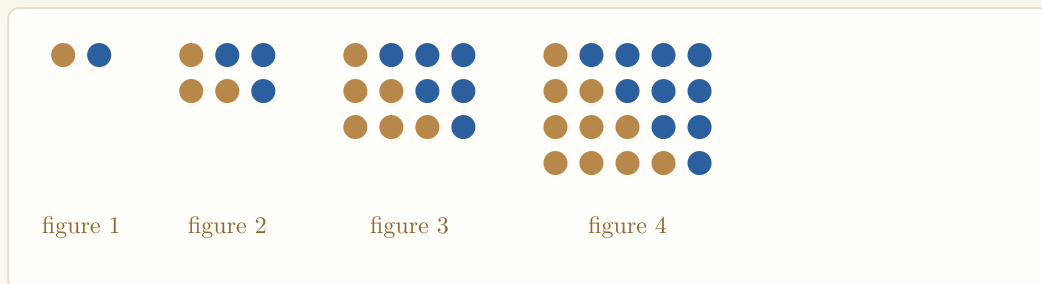
```
u = 0
for k in range(1, 16):
    u = 0.5 * u + 3
print(u)
```

Le script affiche environ 5,9998.

$u_{15} \approx 5,9998$: cela confirme la conjecture 6.

Exercice 8 (★★) : motifs et dénombrement

Des jetons sont disposés en rectangles : la figure n compte n lignes et $n + 1$ colonnes. On note r_n le nombre de jetons de la figure n .



Rectangles de jetons : n lignes et $n+1$ colonnes

1. Donner r_1 , r_2 , r_3 et r_4 .
2. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n .
3. Donner une formule explicite de r_n . La suite (r_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Dans un groupe de n personnes, chacune serre la main de chacune des autres, une seule fois. On note p_n le nombre de poignées de main. Calculer p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 . Combien de poignées s'ajoutent quand une $(n + 1)$ -ième personne arrive ? En déduire une formule explicite de p_n puis p_{30} .

Correction de l'exercice 8

Question 1

On compte lignes $\times$ colonnes : $r_1 = 1 \times 2 = 2$, $r_2 = 2 \times 3 = 6$, $r_3 = 3 \times 4 = 12$, $r_4 = 4 \times 5 = 20$.

$r_1 = 2$, $r_2 = 6$, $r_3 = 12$ et $r_4 = 20$.

Question 2

De la figure n à la figure $n + 1$, on ajoute une colonne de n jetons et une ligne de $n + 2$ jetons, soit $n + (n + 2) = 2n + 2$ jetons.

$r_{n+1} = r_n + 2(n + 1)$. Vérification : $r_2 = 2 + 4 = 6$ et $r_3 = 6 + 6 = 12$.

Question 3

La figure n est un rectangle de n lignes et $n + 1$ colonnes, donc $r_n = n(n + 1)$.

Les écarts valent $r_2 - r_1 = 4$ et $r_3 - r_2 = 6$: ils ne sont pas constants. Les quotients valent $\frac{6}{2} = 3$ et $\frac{12}{6} = 2$: ils ne sont pas constants non plus.

$r_n = n(n + 1)$, et la suite n'est ni arithmétique ni géométrique. (Les deux couleurs montrent que r_n est le double du nombre triangulaire T_n .)

Question 4

Avec 1, 2, 3, 4, 5 personnes : $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 3$, $p_4 = 6$, $p_5 = 10$.

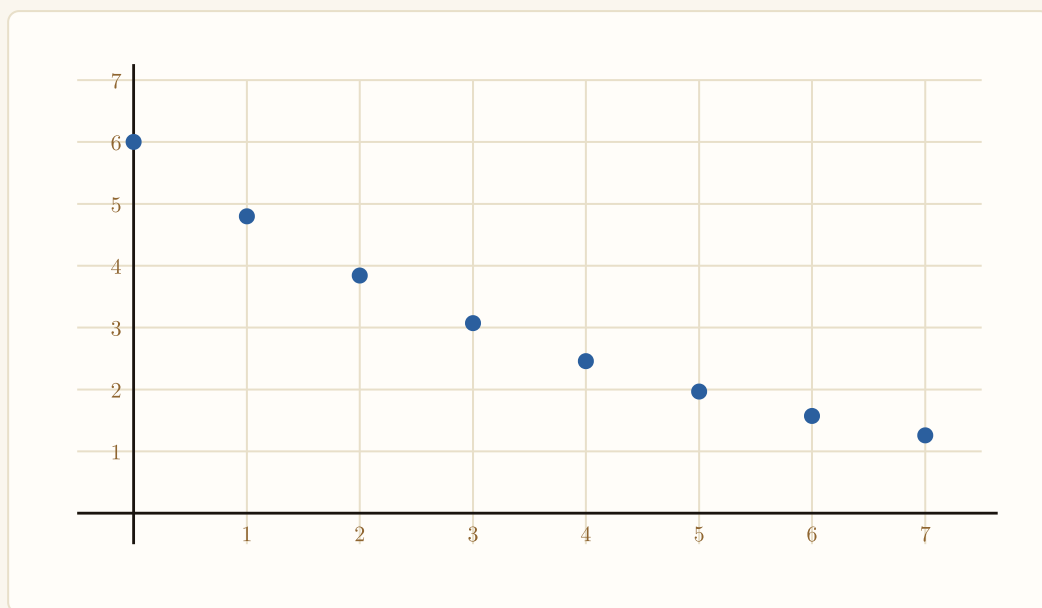
La nouvelle personne serre la main des n personnes déjà présentes : $p_{n+1} = p_n + n$.

On additionne les écarts $p_{k+1} - p_k = k$ pour k de 1 à $n - 1$: $p_n - p_1 = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$, et $p_1 = 0$.

$$p_n = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ donc } p_{30} = \frac{30 \times 29}{2} = 435.$$

Exercice 9 (★★) : lire un nuage de points

Le graphique représente les premiers termes d'une suite (v_n) .



Les premiers termes de (v_n) : points $(n ; v_n)$ pour n de 0 à 7

1. Lire (valeurs approchées) v_0 , v_1 et v_2 .
2. Quel sens de variation conjecturer ? Quelle limite ?
3. Calculer $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$ avec les valeurs lues. On admet que (v_n) est géométrique : donner v_n en fonction de n , puis calculer v_7 et le comparer au graphique.
4. Traduire en une phrase l'évolution d'un terme au suivant.

Correction de l'exercice 9

Question 1

On lit $v_0 = 6$, $v_1 \approx 4,8$ et $v_2 \approx 3,8$.

Question 2

Les points descendent quand n augmente, mais de moins en moins vite, et se rapprochent de l'axe des abscisses.

On conjecture que la suite est décroissante et que sa limite est 0.

Question 3

$\frac{v_1}{v_0} \approx \frac{4,8}{6} = 0,8$ et $\frac{v_2}{v_1} \approx \frac{3,8}{4,8} \approx 0,8$. Le rapport est constant : $q = 0,8$.

Avec $v_0 = 6$: $v_n = 6 \times 0,8^n$. Alors $v_7 = 6 \times 0,8^7 \approx 1,26$, ce qui correspond au dernier point du graphique.

$v_n = 6 \times 0,8^n$ et $v_7 \approx 1,26$.

Question 4

Multiplier par $0,8 = 1 - \frac{20}{100}$ revient à une baisse de 20 %.

Chaque terme est égal à 80 % du précédent : $v_{n+1} = 0,8 v_n$ (baisse de 20 % à chaque étape).

Exercice 10 (★★) : de la récurrence à la formule explicite

On reprend la suite de l'exercice 4 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

1. Écrire $u_{k+1} - u_k$ pour $k = 0, 1, 2$, puis additionner ces écarts pour k de 0 à $n - 1$. En déduire une formule explicite de u_n .
2. Vérifier la formule avec u_4 , puis calculer u_{20} .
3. Retrouver le sens de variation de (u_n) à partir de la formule explicite.

Correction de l'exercice 10

Question 1

$u_1 - u_0 = 0$, $u_2 - u_1 = 2$, $u_3 - u_2 = 4$, et plus généralement $u_{k+1} - u_k = 2k$.

En additionnant pour k de 0 à $n - 1$, les termes intermédiaires se simplifient : $u_n - u_0 = 2(0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)) = 2 \times \frac{(n - 1)n}{2} = n(n - 1)$.

$u_n = 1 + n(n - 1) = n^2 - n + 1$.

Question 2

$u_4 = 16 - 4 + 1 = 13$, ce qui est bien la valeur trouvée à l'exercice 4. Puis $u_{20} = 400 - 20 + 1 = 381$.

Question 3

$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1 - (n^2 - n + 1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 - n^2 + n - 1 = 2n \geq 0$.

On retrouve $u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$: la suite est croissante.

Exercice 11 (★★) : une suite qui approche $\sqrt{2}$

On définit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. Ce type de suite sert à calculer des racines carrées : le programme cite Héron d'Alexandrie à ce sujet.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs exactes puis décimales).
2. Écrire un script qui construit la liste des six premiers termes. Quelle limite peut-on conjecturer ?
3. Avec la calculatrice, calculer u_3^2 . Que remarque-t-on ?

Correction de l'exercice 11

Question 1

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1,4167.$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{577}{204} = \frac{577}{408} \approx 1,414216.$$

Question 2

```
u = 1
L = [u]
for k in range(5):
    u = (u + 2 / u) / 2
    L.append(u)
print(L)
```

Le script affiche une liste dont les derniers termes valent environ **1,4142135624**. Les termes se stabilisent très vite.

On conjecture que la limite est $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.

Question 3

$$u_3^2 = \left(\frac{577}{408} \right)^2 \approx 2,000006.$$

u_3^2 est très proche de 2 : u_3 est déjà une très bonne valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Calculer des termes** en explicite et en récurrence (exercice 1).
- Étudier le **sens de variation** avec $u_{n+1} - u_n$ ou le quotient (exercices 2, 3, 4).
- Un **seuil** avec Python (exercice 5).
- Conjecturer une **limite** (exercices 7 et 11).
- **Motifs et dénombrement**, de la récurrence à la formule explicite (exercices 8 et 10).
- **Lire un nuage de points** (exercices 4 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Soit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Que vaut u_3 ?

- A. 12
- B. 10 (bonne réponse)
- C. 7
- D. 9

Justification : $u_3 = 2 \times 9 - 3 \times 3 + 1 = 18 - 9 + 1 = 10$.

2. Soit $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Que vaut v_3 ?

- A. 15
- B. 11
- C. 25
- D. 17 (bonne réponse)

Justification : $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$.

3. Pour prouver qu'une suite est croissante, on étudie souvent :

- A. le signe de $u_{n+1} - u_n$ (bonne réponse)
- B. la parité de n
- C. la valeur de u_0
- D. le signe de u_n

Justification : La suite est croissante si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n .

4. La suite $w_n = n^2 - 6n$ est :

- A. constante
- B. décroissante jusqu'au rang 3 puis croissante (bonne réponse)
- C. croissante
- D. décroissante

Justification : $w_{n+1} - w_n = 2n - 5$: négatif pour $n \leq 2$, positif pour $n \geq 3$. La suite n'est pas monotone.

5. Dans une suite, que désigne u_{n+1} ?

- A. le nombre $u_n + 1$
- B. le carré de u_n
- C. le produit $u_n \times (n + 1)$
- D. le terme de rang $n + 1$ (bonne réponse)

Justification : u_{n+1} est le terme qui suit u_n . Ce n'est pas $u_n + 1$.