

Contrôle : chapitre 2, Suites numériques

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Étude d'une suite définie explicitement

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 8n + 3$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 . (1 point)
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$. (1,5 points)
3. En déduire le sens de variation de (u_n) , puis la plus petite valeur prise par la suite. La suite est-elle monotone ? (2 points)
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$. (1,5 points)

Exercice 2 (7 points) : Un plan d'entraînement

Une coureuse prépare une course. Le jour 1, elle parcourt 5 km. Ensuite, chaque jour, elle augmente sa distance de 400 m par rapport à la veille. On note d_n la distance, en kilomètres, parcourue le jour n (avec $n \geq 1$). Ainsi $d_1 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $d_{n+1} = d_n + 0,4$.

1. Justifier que la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique, puis exprimer d_n en fonction de n . (2 points)
2. À partir de quel jour la distance parcourue atteint-elle au moins 12 km ? (1,5 points)
3. Calculer la distance totale parcourue pendant les 30 premiers jours. (1,5 points)
4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. En déduire la valeur de $1 + 2 + \dots + 60$. (2 points)

Exercice 3 (7 points) : Élimination d'un médicament

Un patient reçoit une injection de 80 mg d'un médicament. Chaque heure, l'organisme élimine 30 % de la quantité de médicament présente au début de l'heure. On note m_n la quantité de médicament, en mg, présente dans l'organisme n heures après l'injection. Ainsi $m_0 = 80$.

Le script Python incomplet ci-dessous doit renvoyer le plus petit entier n tel que $m_n < 5$, c'est-à-dire le nombre d'heures au bout duquel la quantité devient inférieure au seuil de 5 mg :

```
def rang():  
    m = 80  
    n = 0  
    while ..... :  
        m = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

1. Justifier que (m_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, puis exprimer m_n en fonction de n . (1,5 points)
2. Calculer la quantité de médicament présente 4 heures après l'injection, arrondie au dixième de mg. (1 point)
3. Étudier le sens de variation de (m_n) et interpréter le résultat dans le contexte. (1 point)
4. Compléter le script (les deux zones en pointillés) puis donner la valeur renvoyée par la fonction `rang()`. (2 points)
5. Montrer que la quantité totale de médicament éliminée pendant les 6 premières heures est $80(1 - 0,7^6)$ mg, puis en donner une valeur approchée au dixième. (1,5 points)