

# Contrôle : chapitre 2, Suites numériques

**Durée** : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

## Exercice 1 (6 points) : Étude d'une suite définie explicitement

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 - 8n + 3$ .

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ . (1 point)
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$ . (1,5 points)
3. En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ , puis la plus petite valeur prise par la suite. La suite est-elle monotone ? (2 points)
4. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n > 100$ . (1,5 points)

### Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$$u_0 = 0^2 - 8 \times 0 + 3 = 3.$$

$$u_1 = 1 - 8 + 3 = -4.$$

$$u_2 = 4 - 16 + 3 = -9.$$

$$u_0 = 3, u_1 = -4 \text{ et } u_2 = -9.$$

*Barème : 1 point pour les trois valeurs exactes.*

### Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 8(n+1) + 3] - (n^2 - 8n + 3).$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 3 - n^2 + 8n - 3 = 2n - 7.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$ .

*Barème : 1 point pour le remplacement de  $n$  par  $n + 1$  et le développement correct ; 0,5 point pour la simplification menant à  $2n - 7$ .*

### Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2 points)

Le signe de  $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$  dépend de  $n$  :  $2n - 7 < 0 \iff n < 3,5$ .

Pour  $n \in \{0; 1; 2; 3\}$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$  :  $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ . La suite est strictement décroissante jusqu'au rang 4.

Pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $2n - 7 \geq 1 > 0$  donc  $u_{n+1} > u_n$  : la suite est strictement croissante à partir du rang 4.

| $n$   | 0 | 1  | 2  | 3   | 4   | 5   |
|-------|---|----|----|-----|-----|-----|
| $u_n$ | 3 | -4 | -9 | -12 | -13 | -12 |

La suite n'est **pas monotone**. Elle admet pour minimum  $u_4 = -13$ , atteint uniquement au rang 4.

*Barème : 1 point pour l'étude du signe de  $2n - 7$  selon les valeurs de  $n$  (seuil 3,5) ; 0,5 point pour le changement de sens de variation au rang 4 et la non-monotonie ; 0,5 point pour le minimum  $u_4 = -13$ .*

### Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

$u_n > 100 \iff n^2 - 8n - 97 > 0$ . Le discriminant vaut  $\Delta = 64 + 388 = 452 = 4 \times 113 > 0$ .

Les racines sont  $4 - \sqrt{113} < 0$  et  $4 + \sqrt{113} \approx 14,63$ . Le trinôme (coefficient dominant  $1 > 0$ ) est strictement positif à l'extérieur des racines.

Pour  $n$  entier naturel,  $u_n > 100 \iff n > 4 + \sqrt{113}$ , soit  $n \geq 15$ . Vérification :  $u_{14} = 87 \leq 100$  et  $u_{15} = 108 > 100$ .

Le plus petit entier cherché est  $n = 15$ .

*Barème : 0,5 point pour la mise en inéquation du second degré ; 0,5 point pour les racines et le signe du trinôme ; 0,5 point pour la conclusion  $n = 15$  (justifiée, avec  $u_{14}$  et  $u_{15}$  ou par un tableau de valeurs).*

## Exercice 2 (7 points) : Un plan d'entraînement

Une coureuse prépare une course. Le jour 1, elle parcourt 5 km. Ensuite, chaque jour, elle augmente sa distance de 400 m par rapport à la veille. On note  $d_n$  la distance, en kilomètres, parcourue le jour  $n$  (avec  $n \geq 1$ ). Ainsi  $d_1 = 5$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $d_{n+1} = d_n + 0,4$ .

1. Justifier que la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique, puis exprimer  $d_n$  en fonction de  $n$ . (2 points)
2. À partir de quel jour la distance parcourue atteint-elle au moins 12 km ? (1,5 points)
3. Calculer la distance totale parcourue pendant les 30 premiers jours. (1,5 points)
4. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . En déduire la valeur de  $1 + 2 + \dots + 60$ . (2 points)

### Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $d_{n+1} - d_n = 0,4$  : la différence est constante, donc  $(d_n)$  est arithmétique de raison  $r = 0,4$  et de premier terme  $d_1 = 5$ .

Le premier terme est de rang 1 :  $d_n = d_1 + (n - 1)r = 5 + 0,4(n - 1)$ .

$d_n = 4,6 + 0,4n$  pour tout  $n \geq 1$ .

*Barème : 1 point pour la nature (raison 0,4) et le premier terme  $d_1 = 5$  (rang 1) ; 1 point pour la formule avec  $(n - 1)$  et l'expression simplifiée.*

### Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

$$d_n \geq 12 \iff 4,6 + 0,4n \geq 12 \iff n \geq \frac{7,4}{0,4} = 18,5.$$

$n$  étant entier :  $n \geq 19$ . Vérification :  $d_{18} = 11,8 < 12$  et  $d_{19} = 12,2 \geq 12$ .

C'est à partir du **19e jour** que la distance atteint au moins 12 km.

*Barème : 1 point pour la résolution de l'inéquation ; 0,5 point pour la conclusion en contexte (jour entier).*

### Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

On cherche  $S = d_1 + d_2 + \dots + d_{30}$ . Il y a  $30 - 1 + 1 = 30$  termes.

$$d_{30} = 4,6 + 0,4 \times 30 = 16,6.$$

$$S = 30 \times \frac{d_1 + d_{30}}{2} = 30 \times \frac{5 + 16,6}{2} = 15 \times 21,6 = 324.$$

Elle parcourt **324 km** en 30 jours.

*Barème : 0,5 point pour le nombre de termes (30) ; 0,5 point pour le dernier terme  $d_{30} = 16,6$  ; 0,5 point pour la somme et la conclusion avec l'unité.*

### Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (2 points)

Notons  $S = 1 + 2 + \dots + n$ . On écrit la somme dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n \text{ et } S = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1.$$

En additionnant colonne par colonne, chacune des  $n$  colonnes vaut  $n + 1$  :  $2S = n(n + 1)$ , d'où  $S = \frac{n(n + 1)}{2}$ .

$$\text{Pour } n = 60 : 1 + 2 + \dots + 60 = \frac{60 \times 61}{2} = 1\,830.$$

*Barème : 0,5 point pour l'écriture de la somme dans les deux ordres ; 0,5 point pour les  $n$  colonnes égales à  $n + 1$  ; 0,5 point pour la conclusion  $S = \frac{n(n + 1)}{2}$  ; 0,5 point pour la valeur 1 830.*

## Exercice 3 (7 points) : Élimination d'un médicament

Un patient reçoit une injection de 80 mg d'un médicament. Chaque heure, l'organisme élimine 30 % de la quantité de médicament présente au début de l'heure. On note  $m_n$  la quantité de médicament, en mg, présente dans l'organisme  $n$  heures après l'injection. Ainsi  $m_0 = 80$ .

Le script Python incomplet ci-dessous doit renvoyer le plus petit entier  $n$  tel que  $m_n < 5$ , c'est-à-dire le nombre d'heures au bout duquel la quantité devient inférieure au seuil de 5 mg :

```
def rang():
    m = 80
    n = 0
    while ..... :
        m = .....
        n = n + 1
    return n
```

1. Justifier que  $(m_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison, puis exprimer  $m_n$  en fonction de  $n$ . (1,5 points)
2. Calculer la quantité de médicament présente 4 heures après l'injection, arrondie au dixième de mg. (1 point)
3. Étudier le sens de variation de  $(m_n)$  et interpréter le résultat dans le contexte. (1 point)
4. Compléter le script (les deux zones en pointillés) puis donner la valeur renvoyée par la fonction `rang()`. (2 points)
5. Montrer que la quantité totale de médicament éliminée pendant les 6 premières heures est  $80(1 - 0,7^6)$  mg, puis en donner une valeur approchée au dixième. (1,5 points)

### Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

Éliminer 30 % revient à multiplier par  $1 - \frac{30}{100} = 0,7$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_{n+1} = 0,7 m_n$ .

$(m_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,7$  et de premier terme  $m_0 = 80$ .

$m_n = 80 \times 0,7^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Barème : 1 point pour le coefficient multiplicateur 0,7 justifié et la relation  $m_{n+1} = 0,7 m_n$  ; 0,5 point pour  $m_n = m_0 q^n$ .

### Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1 point)

$$m_4 = 80 \times 0,7^4 = 80 \times 0,2401 = 19,208.$$

Après 4 heures, il reste environ **19,2 mg** de médicament.

*Barème : 0,5 point pour le calcul  $80 \times 0,7^4$  ; 0,5 point pour la valeur arrondie avec l'unité.*

### Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1 point)

Pour tout  $n$ ,  $m_{n+1} - m_n = 0,7 m_n - m_n = -0,3 m_n < 0$  car  $m_n = 80 \times 0,7^n > 0$ .

La suite  $(m_n)$  est strictement décroissante : la quantité de médicament dans l'organisme diminue à chaque heure.

*Barème : 0,5 point pour le calcul de  $m_{n+1} - m_n$  et son signe justifié ( $m_n > 0$ ) ; 0,5 point pour la conclusion en contexte.*

### Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2 points)

La boucle doit continuer tant que la quantité n'est pas encore inférieure à 5, et chaque tour multiplie la quantité par 0,7 :

```
def rang():
    m = 80
    n = 0
    while m >= 5 :
        m = 0.7 * m
        n = n + 1
    return n
```

Valeurs :  $m_7 = 80 \times 0,7^7 \approx 6,59 \geq 5$  et  $m_8 = 80 \times 0,7^8 \approx 4,61 < 5$ .

La fonction renvoie **8** : au bout de 8 heures, il reste moins de 5 mg de médicament.

*Barème : 0,5 point pour la condition du while ( $m \geq 5$ ) ; 0,5 point pour la mise à jour  $m = 0.7 * m$  ; 0,5 point pour la valeur renvoyée 8 ; 0,5 point pour la justification par  $m_7$  et  $m_8$  (ou interprétation).*

### Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1,5 points)

Pendant l'heure suivant l'instant  $k$ , la quantité éliminée est  $0,3 m_k$ . Sur les 6 premières heures (de  $k = 0$  à  $k = 5$ ), la quantité éliminée est :

$0,3(m_0 + m_1 + \dots + m_5)$ , somme de  $5 - 0 + 1 = 6$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $0,7 \neq 1$ .

$$m_0 + \dots + m_5 = 80 \times \frac{1 - 0,7^6}{1 - 0,7} = \frac{80(1 - 0,7^6)}{0,3}, \text{ donc la quantité éliminée vaut } 0,3 \times \frac{80(1 - 0,7^6)}{0,3} = 80(1 - 0,7^6).$$

$$\text{Valeur : } 80 \times (1 - 0,117649) = 70,58808.$$

Environ **70,6 mg** de médicament sont éliminés en 6 heures (ce qui est cohérent avec  $m_0 - m_6$ ).

*Barème : 0,5 point pour la quantité éliminée  $0,3 m_k$  chaque heure ; 0,5 point pour la somme géométrique de 6 termes ; 0,5 point pour le résultat  $80(1 - 0,7^6)$  et la valeur 70,6 mg.*

### Récapitulatif du barème

| Exercice     | Points |
|--------------|--------|
| Exercice 1   | 6      |
| Exercice 2   | 7      |
| Exercice 3   | 7      |
| <b>Total</b> | 20     |