

Variables aléatoires : le cours

Tu joues à un jeu où tu peux gagner ou perdre de l'argent. **À la longue, est-ce que tu gagnes ou tu perds ?** Une variable aléatoire et son espérance répondent à cette question avec un seul nombre.

Dans ce chapitre, tu apprends à décrire un résultat numérique dû au hasard par une **variable aléatoire**, à calculer sa **loi**, son **espérance**, sa **variance** et son **écart type**, puis à **simuler** une variable aléatoire avec Python.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge : **la loi donne tout** : espérance, variance et écart type se calculent à partir du tableau.
- Avant de calculer, **définis la variable X** et **liste ses valeurs possibles**.

1. Variable aléatoire réelle

Quand on lance un dé, l'**issue** est une face. Mais ce qui t'intéresse est souvent un **nombre** qui dépend de cette issue : un gain, un nombre de piles, une somme. C'est exactement ce qu'est une variable aléatoire.

Définition. Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction** définie sur Ω et à valeurs réelles :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega)$$

À chaque issue ω , elle associe un **nombre réel** $X(\omega)$. Les **valeurs possibles** de X sont les nombres $X(\omega)$ obtenus quand ω parcourt Ω .

Exemple 1 (deux pièces). On lance deux fois une pièce équilibrée. L'univers est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ (les quatre issues sont équiprobables). Soit X le **nombre de piles** :

Issue ω	PP	PF	FP	FF
$X(\omega)$	2	1	1	0

Les valeurs possibles de X sont 0, 1 et 2.

Exemple 2 (jeu de dé). On lance un dé équilibré. Pour 1, 2 ou 3, on **perd** 1 €. Pour 4 ou 5, on **gagne** 1 €. Pour 6, on **gagne** 4 €. Ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et X est le **gain algébrique** en euros :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	-1	-1	-1	1	1	4

Les valeurs possibles de X sont -1, 1 et 4. Deux issues différentes peuvent donner la **même** valeur : une fonction n'a pas besoin d'être injective.

Notations. Pour un réel a :

- $\{X = a\}$ est l'événement formé des issues ω telles que $X(\omega) = a$; sa probabilité se note $P(X = a)$;
- $\{X \leq a\}$ est l'événement formé des issues ω telles que $X(\omega) \leq a$; sa probabilité se note $P(X \leq a)$.

On définit de la même façon $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$, $\{X > a\}$, $\{a \leq X \leq b\}$.

Exemple (deux pièces). $\{X = 1\} = \{PF; FP\}$ donc $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Et $\{X \leq 1\} = \{PF; FP; FF\}$ donc $P(X \leq 1) = \frac{3}{4}$.

Passer de la langue naturelle aux symboles (et inversement) est une capacité attendue. Voici les traductions à connaître :

En français	En symboles
« X vaut 3 »	$\{X = 3\}$
« X est au plus égal à 3 »	$\{X \leq 3\}$
« X est strictement inférieur à 3 »	$\{X < 3\}$
« X est au moins égal à 3 »	$\{X \geq 3\}$
« X est strictement supérieur à 3 »	$\{X > 3\}$
« X est compris entre 2 et 5 (bornes incluses) »	$\{2 \leq X \leq 5\}$
« X est différent de 3 »	$\{X \neq 3\}$

Astuce. Pour **modéliser** une situation avec une variable aléatoire, réponds à trois questions : **1.** Quel est le **nombre** qui m'intéresse (gain, nombre de succès, somme) ? **2.** Quelles sont ses **valeurs possibles** ? **3.** Quelle est son **unité** ?

Un peu d'histoire. Les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII^e siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler et d'Alembert utilisent déjà les notions de variable aléatoire et d'espérance pour des problèmes de jeux, d'assurances et d'astronomie. La description actuelle, avec un **univers**, ne s'impose que vers 1930 : l'univers joue le rôle de « source d'aléas », et la variable aléatoire, présente depuis l'origine sans définition précise, apparaît alors comme une **fonction définie sur l'univers**.

Pièges :

- Confondre l'**issue** ω (une face, une suite de piles et de faces) avec la **valeur** $X(\omega)$ (un nombre).
- Oublier une valeur possible de X (par exemple 0).
- Écrire $P(X = 1)$ au lieu de $P(X \leq 1)$, ou l'inverse.
- Traduire « au moins 3 » par $X > 3$: c'est $X \geq 3$.

« Au plus » et « au moins » : deux petits mots, des milliers de points perdus en contrôle.

2. Loi d'une variable aléatoire

Définition. Si X a pour valeurs possibles $x_1, \dots, x_n$, la **loi** de X est la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$. On la présente dans un **tableau**. On a toujours

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Pourquoi la somme vaut 1 ? Les événements $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_n\}$ ne se chevauchent pas et, ensemble, ils contiennent **toutes** les issues de Ω .

Exemple 1 (deux pièces).

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

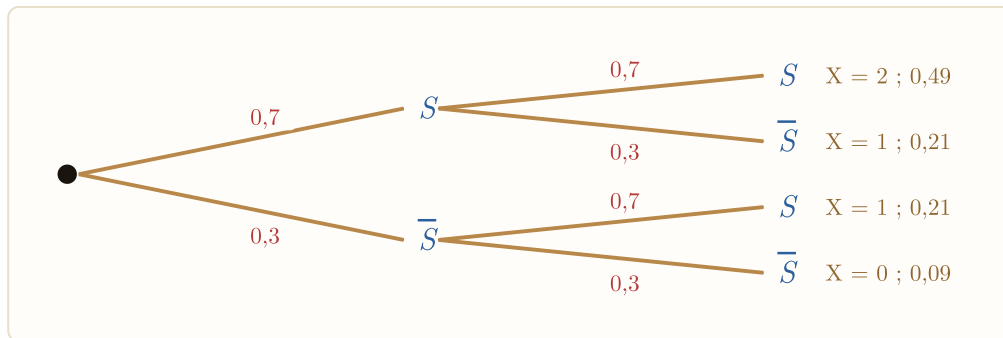
Exemple 2 (jeu de dé). $P(X = -1) = \frac{3}{6}$ (issues 1, 2, 3), $P(X = 1) = \frac{2}{6}$ (issues 4, 5) et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$ (issue 6).

x_i	-1	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Calculer $P(X \leq a)$: on additionne les probabilités des valeurs $x_i \leq a$. Ici $P(X \leq 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $P(X \geq 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Trois façons de trouver une loi : (a) univers équiprobable : on compte les issues favorables à chaque $\{X = x_i\}$; (b) un tableau ou une urne : on lit les effectifs ; (c) un **arbre pondéré**, qu'on additionne chemin par chemin.

Exemple (arbre). Un tireur réussit chaque tir avec la probabilité 0,7, les deux tirs étant indépendants. Soit X le nombre de tirs réussis. L'arbre est construit comme au chapitre 9 (répétition d'épreuves de Bernoulli) : on multiplie le long d'un chemin.



Deux tirs indépendants, succès S (probabilité 0,7) : à droite, la valeur de X et la probabilité du chemin

$X = 1$ correspond à **deux chemins** ($S\bar{S}$ et $\bar{S}S$) : $P(X = 1) = 0,21 + 0,21 = 0,42$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,09	0,42	0,49

On vérifie : $0,09 + 0,42 + 0,49 = 1$. Le nombre de succès n'est ici qu'un **exemple** de variable aléatoire : sa loi se lit sur l'arbre.

Astuce. Pour trouver une loi : **1.** liste les valeurs possibles, **2.** calcule la probabilité de chaque événement $\{X = x_i\}$, **3. vérifie que la somme vaut 1.**

La vérification de la somme détecte la moitié des erreurs en trois secondes.

Pièges :

- Oublier une valeur possible de X .
- Penser que toutes les valeurs sont équiprobables : $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ n'a rien d'une fatalité.
- Une somme de probabilités différente de 1 : la loi est fausse.

Une loi de probabilité dont la somme fait 1,2 n'est pas une loi : c'est un budget de vacances.

3. Espérance

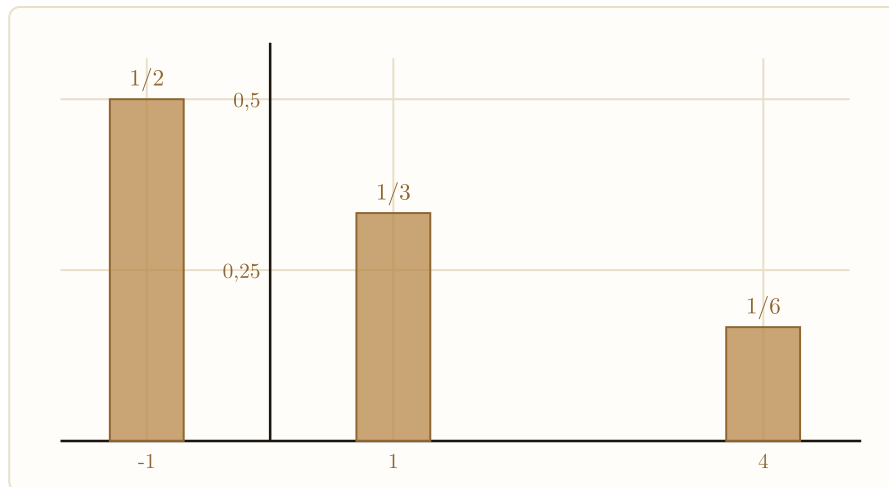
Définition. L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

C'est la **moyenne pondérée** des valeurs de X par leurs probabilités.

Exemple (jeu de dé).

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{-3 + 2 + 4}{6} = \frac{1}{2}$$



Loi du gain au jeu de dé : $P(X = -1) = 1/2$, $P(X = 1) = 1/3$, $P(X = 4) = 1/6$

Interprétation. Si l'on joue un très grand nombre de fois, le gain moyen par partie est **proche de $E(X)$** : ici, environ 0,50 € gagné par partie. C'est ce que tu vérifieras par simulation à la fin du chapitre. L'espérance ne dit rien sur le résultat d'**une seule** partie.

Jeu équitable. Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance du gain algébrique est nulle. Il est **favorable** au joueur si elle est positive, **défavorable** si elle est négative.

Astuce. Pour un jeu avec une **mise m** , calcule d'abord l'espérance de la somme **R** que tu **reçois**, puis retranche la mise : $E(G) = E(R) - m$. Le jeu est équitable pour $m = E(R)$.

Pièges :

- $E(X)$ **n'est pas** une valeur prise par X : l'espérance d'un dé est 3,5, qu'on ne peut pas obtenir.
- Ne confonds pas **gain brut** (somme reçue) et **gain algébrique** (mise déduite).
- Pense aux **valeurs négatives** : une perte compte avec le signe $-$.

« J'ai toujours de la chance au loto, j'ai déjà perdu douze fois d'affilée. » Ton espérance a une autre opinion.

4. Linéarité de l'espérance

Propriété (linéarité de l'espérance). Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

Démonstration. Si $a \neq 0$, la variable $aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les probabilités p_i . Donc

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) p_i = a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i = a E(X) + b \times 1.$$

Si $a = 0$, la variable $aX + b$ est constante égale à b , d'espérance $b = 0 \times E(X) + b$: la formule reste vraie.

□

Exemples. Si la partie coûte 2 €, le gain net est $X - 2$ et $E(X - 2) = E(X) - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$. Si l'on double tous les gains, $E(2X) = 2E(X) = 1$. Et pour changer d'unité : si X est un temps en minutes, $60X$ est le même temps en secondes et $E(60X) = 60 E(X)$.

Pièges :

- $E(X^2) \neq (E(X))^2$: la linéarité ne passe **pas** à travers le carré.
- Dans $E(aX + b)$, le b s'ajoute **une seule fois**, sans être multiplié par a .

5. Variance et écart type

L'espérance donne la valeur moyenne. Il faut aussi mesurer la **dispersion** des valeurs autour de cette moyenne.

Définition. La **variance** de X , notée $V(X)$, et l'**écart type** $\sigma(X)$ sont :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Interprétation. La variance est la moyenne (pondérée) des **carrés des écarts** à l'espérance. Plus les valeurs sont éloignées de $E(X)$, plus $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont grands. L'écart type a la **même unité** que X .

Exemple (deux jeux de même espérance). Jeu A : on gagne 1 € ou on perd 1 €, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Jeu B : on gagne 10 € ou on perd 10 €, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Dans les deux cas $E = 0$.
Mais

$$V(A) = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1, \quad \sigma(A) = 1 \quad V(B) = \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(-10)^2 = 100, \quad \sigma(B) = 10.$$

Le jeu B est équitable comme le jeu A , mais bien plus **risqué** : ses résultats sont dix fois plus dispersés.

Formule de König-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \text{avec } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

Démonstration. Notons $\mu = E(X)$. On développe $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$, puis on utilise $\sum p_i = 1$ et $\sum p_i x_i = \mu$:

$$V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2. \quad \square$$

(Si deux valeurs x_i ont le même carré, on regroupe leurs termes : la somme $\sum x_i^2 p_i$ ne change pas.)

Exemple (jeu de dé). $E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{6} = \frac{3+2+16}{6} = \frac{7}{2}$. Donc

$$V(X) = \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80.$$

Astuce. Avec des valeurs entières, **König-Huygens** est presque toujours plus rapide que la définition : tu calcules $E(X)$, puis $E(X^2)$, puis tu soustrais.

Une variance est **toujours positive ou nulle** (somme de termes positifs). Si tu trouves un nombre négatif, cherche l'erreur.

Pour aller plus loin, hors programme. Pour tous réels a et b , $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$: ajouter b ne change pas la dispersion, multiplier par a la multiplie par $|a|$. Ce résultat n'est pas au programme de Première : si tu as besoin de la variance de $aX + b$, **calcule d'abord la loi de $aX + b$** puis applique la définition ou König-Huygens.

Autre approfondissement facultatif du programme : l'étude de la fonction $x \mapsto E((X - x)^2)$, qui est un polynôme du second degré dont le minimum est $V(X)$ (voir la fiche 3).

Pièges :

- Oublier de **mettre au carré** : $E(X^2) \neq (E(X))^2$.
- Écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)$ (sans carré).
- Donner la variance quand on demande l'**écart type** : n'oublie pas la racine carrée.
- L'écart type a la **même unité** que X , la variance a l'unité au carré.

Une variance négative, c'est une dispersion qui range sa chambre mieux qu'un nombre ne le peut : on a fait une erreur de calcul.

6. Lien avec les statistiques

Une série statistique peut se lire comme une variable aléatoire : on **tire au hasard**, avec équiprobabilité, un individu de la population, et X est la valeur observée sur cet individu. Alors les **proportions** deviennent des **probabilités**, la **moyenne** devient l'**espérance** et l'**écart type de la série** devient $\sigma(X)$.

Exemple. Cinq élèves ont obtenu 8, 10, 10, 12 et 15. On tire un élève au hasard et X est sa note.

x_i	8	10	12	15
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = \frac{8 + 20 + 12 + 15}{5} = 11 \quad E(X^2) = \frac{64 + 200 + 144 + 225}{5} = 126,6 \quad V(X) = 126,6 - 11^2 = 5,6$$

On retrouve la moyenne 11 de la série et son écart type $\sqrt{5,6} \approx 2,37$.

7. Algorithmique : espérance, variance, écart type

Une loi se stocke dans une **liste de couples** (x, p) . Les trois fonctions suivantes appliquent les définitions :

```

from math import sqrt

def esperance(loi):
    return sum(x * p for x, p in loi)

def variance(loi):
    m = esperance(loi)
    return sum(p * (x - m) ** 2 for x, p in loi)

def ecart_type(loi):
    return sqrt(variance(loi))

loi = [(-1, 1/2), (1, 1/3), (4, 1/6)]
print(esperance(loi), variance(loi), ecart_type(loi))

```

Le script affiche `0.49999999999999994 3.25 1.8027756377319946` : on retrouve $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{4}$ et $\frac{\sqrt{13}}{2}$, avec les **erreurs d'arrondi** habituelles des flottants.

Exemple d'algorithme : la fréquence des lettres d'un texte. On parcourt le texte, on compte chaque lettre, puis on divise par le nombre de lettres. C'est la loi de l'expérience « tirer au hasard une lettre du texte ».

```

def frequences(texte):
    comptes = {}
    total = 0
    for c in texte.lower():
        if c.isalpha():
            comptes[c] = comptes.get(c, 0) + 1
            total += 1
    return {c: n / total for c, n in comptes.items()}

print(frequences("variable aleatoire"))

```

Le texte contient 17 lettres dont 4 fois la lettre **a** : la fréquence de **a** est $\frac{4}{17} \approx 0,235$. Pour obtenir une variable **réelle**, on associe un nombre à chaque lettre : par exemple $X = 1$ si la lettre est une voyelle et $X = 0$ sinon. Alors $E(X)$ est la **proportion de voyelles** du texte (ici $\frac{10}{17}$).

8. Expérimentation : simuler une variable aléatoire

Une variable aléatoire se **simule** : on répète l'expérience et on calcule la **moyenne** des résultats obtenus sur un **échantillon** de taille n . Pour le jeu de dé du paragraphe 3 :

```

from random import randint

def gain():
    de = randint(1, 6)
    if de <= 3:
        return -1
    if de <= 5:
        return 1
    return 4

def moyenne(n):
    total = 0
    for _ in range(n):
        total += gain()
    return total / n

```

La moyenne m d'un échantillon est elle-même **aléatoire** : elle change à chaque exécution. On compare m à l'espérance $\mu = 0,5$ pour des tailles n de plus en plus grandes :

```

mu = 0.5
for n in [10, 100, 1000, 10000]:
    m = moyenne(n)
    print(n, m, abs(m - mu))

```

Exemple d'exécution : on a obtenu $m = 1,1$ pour $n = 10$, $m = 0,7$ pour $n = 100$, $m = 0,539$ pour $n = 1000$ et $m = 0,5085$ pour $n = 10\,000$. Chez toi, les valeurs seront différentes. On **observe** que la distance $|m - \mu|$ est en général de plus en plus petite quand n augmente, sans que ce soit toujours le cas d'une exécution à l'autre.

On quantifie cet écart en simulant N échantillons de taille n et en calculant la **proportion** de ceux pour lesquels $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$:

```

from math import sqrt

def proportion(N, n, mu, sigma):
    ok = 0
    for _ in range(N):
        m = moyenne(n)
        if abs(m - mu) <= 2 * sigma / sqrt(n):
            ok += 1
    return ok / N

print(proportion(1000, 100, 0.5, sqrt(13) / 2))

```

Ici $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{13}}{10} \approx 0,36$. Lors d'une exécution, on a obtenu une proportion de **0,96** : **environ 95 % des moyennes d'échantillons** sont à une distance de μ inférieure ou égale à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$. C'est une **observation expérimentale** et non un théorème démontré ici. Elle montre que l'espérance peut être **estimée** par une moyenne observée, avec une précision de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Astuce. Pour diviser l'intervalle $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ par 2, il faut **quatre fois plus** d'observations. La précision coûte cher.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Définir** une variable aléatoire, décrire Ω et ses valeurs possibles.
- **Traduire** une phrase en symboles ($\{X \leq a\}$, $P(X = a)$) et inversement.
- **Écrire la loi** d'une variable aléatoire (tableau, urne, arbre) et vérifier que la somme vaut 1.
- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (avec **König-Huygens**).
- Utiliser $E(aX + b) = aE(X) + b$; connaître et refaire les **deux démonstrations** (linéarité, König-Huygens).
- Étudier un **jeu équitable** ou une **mise**.
- **Lire ou écrire** un script (espérance, variance, écart type, moyenne d'un échantillon, proportion).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.