

Variables aléatoires : exercices de synthèse

Trois exercices de synthèse (compte environ 20 à 25 minutes chacun), corrigés question par question, avec la rédaction attendue. Cherche chaque question seul avant de lire la correction.

Exercice 1 : une pièce truquée au jeu de la foire

Un forain propose le jeu suivant. On lance **trois fois** une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$, les lancers étant indépendants. Pour chaque pile obtenu, le joueur reçoit 2 €. La partie coûte 1,50 €. Soit X le nombre de piles et G le gain algébrique du joueur, en euros.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois lancers et donner la loi de X .
 2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 3. Exprimer G en fonction de X , puis calculer $E(G)$. Donner la loi de G et en déduire $V(G)$ et $\sigma(G)$.
 4. Le jeu est-il équitable ? Pour quelle mise le serait-il ?
-

Exercice 2 : machines et gain par pièce

Une usine possède deux machines. La machine A produit 60 % des pièces et la machine B en produit 40 %. Une pièce de A est défectueuse avec la probabilité 0,02, une pièce de B avec la probabilité 0,05. Une pièce est vendue 20 €. Si elle est défectueuse, elle est remplacée gratuitement, ce qui coûte 15 € à l'usine. Soit X le gain de l'usine pour une pièce, en euros, et D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité $P(D)$.
 2. Donner la loi de X .
 3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
 4. Interpréter $E(X)$ pour 1000 pièces vendues.
 5. Le coût de remplacement est maintenant de c euros. Pour quelle valeur de c le gain moyen par pièce est-il nul ?
-

Exercice 3 : simulation et distance à l'espérance

On reprend le jeu de dé du cours : gain -1 pour 1, 2, 3, gain 1 pour 4, 5 et gain 4 pour 6. On a $\mu = E(X) = \frac{1}{2}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80$. Pour un échantillon de taille n , on note m la moyenne observée.

1. Calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$ (valeurs approchées au centième). Comment cette quantité évolue-t-elle quand n est multiplié par 100 ?
2. Compléter les fonctions qui simulent un gain, puis la moyenne d'un échantillon de taille n :

```
from random import randint

def gain():
    de = randint(1, 6)
    if de <= 3:
        return ...
    if de <= 5:
        return ...
    return ...

def moyenne(n):
    total = 0
    for _ in range(n):
        total += ...
    return ...
```

3. Écrire une fonction `proportion(N, n, mu, sigma)` qui simule N échantillons de taille n et renvoie la proportion de ceux pour lesquels $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. Lors d'une exécution avec $N = 1000$, on a obtenu les proportions 0,958 pour $n = 10$, 0,96 pour $n = 100$ et 0,957 pour $n = 1000$. Que peut-on dire ? Combien d'observations faut-il pour que l'intervalle soit divisé par 4 ?