

Variables aléatoires : exercices de synthèse

Trois exercices de synthèse (compte environ 20 à 25 minutes chacun), corrigés question par question, avec la rédaction attendue. Cherche chaque question seul avant de lire la correction.

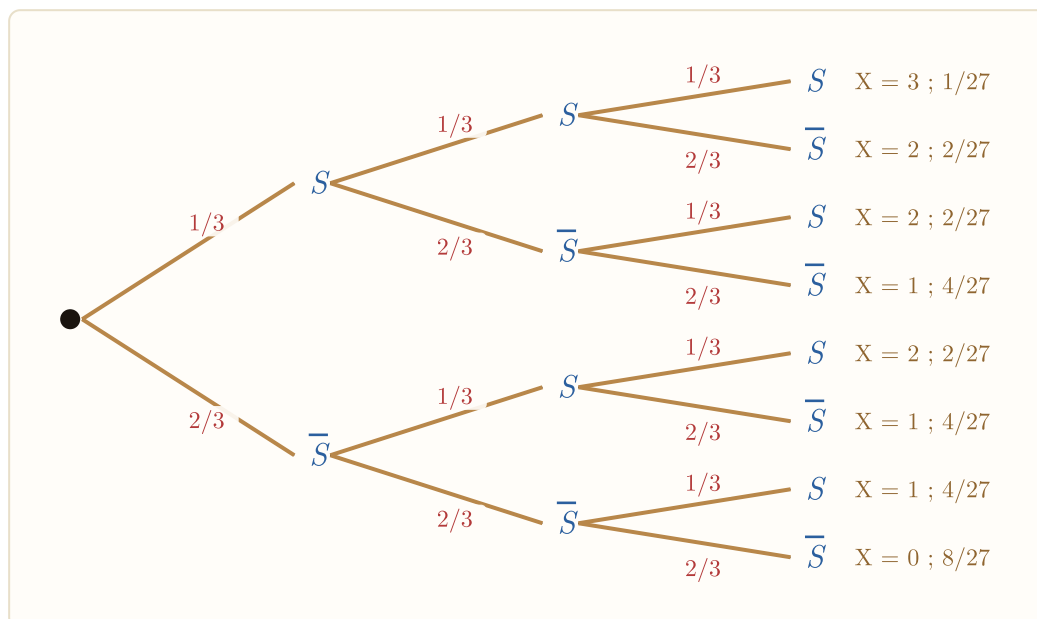
Exercice 1 : une pièce truquée au jeu de la foire

Un forain propose le jeu suivant. On lance **trois fois** une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$, les lancers étant indépendants. Pour chaque pile obtenu, le joueur reçoit 2 €. La partie coûte 1,50 €. Soit X le nombre de piles et G le gain algébrique du joueur, en euros.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois lancers et donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Exprimer G en fonction de X , puis calculer $E(G)$. Donner la loi de G et en déduire $V(G)$ et $\sigma(G)$.
4. Le jeu est-il équitable ? Pour quelle mise le serait-il ?

Correction de la question 1

Pile est le succès S (probabilité $\frac{1}{3}$) ; les lancers sont indépendants, on multiplie le long d'un chemin (voir le chapitre 9).



Trois lancers de la pièce truquée, succès S = pile (probabilité $\frac{1}{3}$) : à droite, la valeur de X et la probabilité du chemin

$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. $X = 1$: trois chemins de probabilité $\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$, donc $P(X = 1) = \frac{12}{27}$. $X = 2$: trois chemins de probabilité $\frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$, donc $P(X = 2) = \frac{6}{27}$. $P(X = 3) = \frac{1}{27}$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

Vérification : $\frac{8 + 12 + 6 + 1}{27} = 1$.

Correction de la question 2

$$E(X) = \frac{0 \times 8 + 1 \times 12 + 2 \times 6 + 3 \times 1}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

$$E(X^2) = \frac{0 \times 8 + 1 \times 12 + 4 \times 6 + 9 \times 1}{27} = \frac{45}{27} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{D'après König-Huygens, } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

Correction de la question 3

Le joueur reçoit $2X$ euros et paie 1,50 € : $G = 2X - 1,5$. Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 2E(X) - 1,5 = 0,5$.

G prend les valeurs $-1,5, 0,5, 2,5$ et $4,5$ avec les probabilités $\frac{8}{27}, \frac{12}{27}, \frac{6}{27}$ et $\frac{1}{27}$.

$$E(G^2) = \frac{2,25 \times 8 + 0,25 \times 12 + 6,25 \times 6 + 20,25 \times 1}{27} = \frac{78,75}{27} = \frac{35}{12}.$$

$$V(G) = \frac{35}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}.$$

$$E(G) = 0,5, V(G) = \frac{8}{3} \text{ et } \sigma(G) = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,63 \text{ €}.$$

(Pour aller plus loin, hors programme : on retrouve $V(G) = 2^2 V(X) = \frac{8}{3}$ avec $V(aX + b) = a^2 V(X)$.)

Correction de la question 4

$E(G) = 0,5 \neq 0$: le jeu n'est pas équitable ; il est **favorable au joueur**, qui gagne en moyenne 0,50 € par partie.

Pour une mise m , $G = 2X - m$ et $E(G) = 2 - m$.

Le jeu serait équitable pour une mise $m = 2$ €.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : arbre, chemins **comptés**, loi complète, **somme vérifiée**.
- **Q2** : espérance, $E(X^2)$, König-Huygens.
- **Q3** : expression affine de G , linéarité citée, **loi de G** pour la variance.
- **Q4** : conclusion **interprétée**, mise équitable.

Exercice 2 : machines et gain par pièce

Une usine possède deux machines. La machine A produit 60 % des pièces et la machine B en produit 40 %. Une pièce de A est défectueuse avec la probabilité 0,02, une pièce de B avec la probabilité 0,05. Une pièce est vendue 20 €. Si elle est défectueuse, elle est remplacée gratuitement, ce qui coûte 15 € à l'usine. Soit X le gain de l'usine pour une pièce, en euros, et D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité $P(D)$.
2. Donner la loi de X .
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Interpréter $E(X)$ pour 1000 pièces vendues.
5. Le coût de remplacement est maintenant de c euros. Pour quelle valeur de c le gain moyen par pièce est-il nul ?

Correction de la question 1

A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales (chapitre 9) :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032.$$

$$P(D) = 0,032.$$

Correction de la question 2

Une pièce correcte rapporte 20 €. Une pièce défectueuse rapporte $20 - 15 = 5$ €.

x_i	20	5
$P(X = x_i)$	0,968	0,032

Vérification : $0,968 + 0,032 = 1$.

Correction de la question 3

$$E(X) = 20 \times 0,968 + 5 \times 0,032 = 19,36 + 0,16 = 19,52.$$

$$E(X^2) = 400 \times 0,968 + 25 \times 0,032 = 387,2 + 0,8 = 388.$$

$$V(X) = 388 - 19,52^2 = 388 - 381,0304 = 6,9696.$$

$$E(X) = 19,52 \text{ €}, V(X) = 6,9696 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{6,9696} = 2,64 \text{ €}.$$

Correction de la question 4

Le gain moyen par pièce est de 19,52 €. Sur un grand nombre de pièces vendues, comme 1000, le gain total divisé par le nombre de pièces est en général proche de 19,52 €.

Pour 1000 pièces, on peut donc s'attendre à un gain total de l'ordre de 19 520 €. C'est une estimation, pas une valeur certaine.

Correction de la question 5

Si le remplacement coûte c euros, X vaut 20 avec la probabilité 0,968 et $20 - c$ avec la probabilité 0,032.

$$E(X) = 20 - 0,032c, \text{ qui est nulle pour } c = \frac{20}{0,032} = 625.$$

Le gain moyen est nul si un remplacement coûte 625 €.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- Q1 : partition citée, formule des probabilités totales.
- Q2 : valeurs possibles et loi, somme vérifiée.
- Q3 : König-Huygens, écart type avec racine.

- **Q4** : interprétation de l'espérance comme gain **moyen** par pièce.
- **Q5** : équation en c , résolution.

Exercice 3 : simulation et distance à l'espérance

On reprend le jeu de dé du cours : gain -1 pour 1, 2, 3, gain 1 pour 4, 5 et gain 4 pour 6. On a $\mu = E(X) = \frac{1}{2}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80$. Pour un échantillon de taille n , on note m la moyenne observée.

1. Calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$ (valeurs approchées au centième). Comment cette quantité évolue-t-elle quand n est multiplié par 100 ?
2. Compléter les fonctions qui simulent un gain, puis la moyenne d'un échantillon de taille n :

```
from random import randint

def gain():
    de = randint(1, 6)
    if de <= 3:
        return ...
    if de <= 5:
        return ...
    return ...

def moyenne(n):
    total = 0
    for _ in range(n):
        total += ...
    return ...
```

3. Écrire une fonction `proportion(N, n, mu, sigma)` qui simule N échantillons de taille n et renvoie la proportion de ceux pour lesquels $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. Lors d'une exécution avec $N = 1000$, on a obtenu les proportions 0,958 pour $n = 10$, 0,96 pour $n = 100$ et 0,957 pour $n = 1000$. Que peut-on dire ? Combien d'observations faut-il pour que l'intervalle soit divisé par 4 ?

Correction de la question 1

$$2\sigma = \sqrt{13} \text{ donc } \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Pour } n = 10 : \sqrt{1,3} \approx 1,14. \text{ Pour } n = 100 : \frac{\sqrt{13}}{10} \approx 0,36. \text{ Pour } n = 1000 : \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{1000}} \approx 0,11.$$

Quand n est multiplié par 100, la quantité est **divisée par 10**.

Correction de la question 2

Le gain vaut -1 , 1 ou 4 selon le résultat du dé ; la moyenne est la somme des gains divisée par n .

```
from random import randint

def gain():
    de = randint(1, 6)
    if de <= 3:
        return -1
    if de <= 5:
        return 1
    return 4

def moyenne(n):
    total = 0
    for _ in range(n):
        total += gain()
    return total / n
```

Correction de la question 3

On génère une moyenne d'échantillon avec `moyenne(n)` et on teste l'écart avec μ .

```
from math import sqrt

def proportion(N, n, mu, sigma):
    ok = 0
    for _ in range(N):
        m = moyenne(n)
        if abs(m - mu) <= 2 * sigma / sqrt(n):
            ok += 1
    return ok / N
```

La fonction compte les échantillons proches de μ et renvoie la **fréquence** de ce cas.

Correction de la question 4

Les trois proportions sont proches de **0,95** (un peu au-dessus).

Environ 95 % des moyennes d'échantillons sont à une distance de $\mu = 0,5$ inférieure ou égale à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$: cet intervalle est de plus en plus étroit quand n augmente (1,14 puis 0,36 puis 0,11), donc la moyenne observée estime l'espérance avec une précision qui s'améliore.

Pour diviser $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ par 4, il faut multiplier $\sqrt{n}$ par 4, donc n par 16.

(Il s'agit d'observations par simulation : les valeurs changent à chaque exécution.)

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : calcul de $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour les trois valeurs de n , avec **commentaire**.
- **Q2** : valeurs des gains, accumulation et division par n .
- **Q3** : boucle, test d'écart, **fréquence renvoyée**.
- **Q4** : résultat **interprété** avec les mots du problème, sans parler de preuve.