

Guide de rédaction : variables aléatoires

Ce guide complète le Guide de rédaction général. Il rassemble, pour le chapitre Variables aléatoires, **les quatorze situations qui reviennent en contrôle** et, pour chacune, la rédaction modèle. Dans ce chapitre, la rédaction consiste surtout à **définir la variable aléatoire**, à **vérifier que la somme des probabilités vaut 1**, à **citer la formule** et à **interpréter** le résultat.

Le principe du chapitre

Dans un exercice sur une variable aléatoire, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **variable** définie avec son unité et ses valeurs ;
- la **loi** écrite en tableau, **somme vérifiée** ;
- la **formule citée** (espérance, König-Huygens, linéarité) ;
- le **calcul** avec les valeurs substituées ;
- l'**interprétation** par une phrase.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : définir la variable aléatoire et ses valeurs

« Soit X le gain algébrique du joueur, en euros. L'univers est $\Omega = \{1; \dots; 6\}$ et $X(\omega) = -1$ si $\omega \leq 3$, 1 si $\omega \in \{4; 5\}$ et 4 si $\omega = 6$. X prend les valeurs -1 , 1 et 4 . »

Écris l'**unité**, l'**univers** et les **valeurs possibles**.

Situation 2 : traduire une phrase en symboles

« La probabilité que le gain soit au plus égal à 1 € s'écrit $P(X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{5}{6}$. »

« Au plus » : $\leq$. « Au moins » : $\geq$. « Strictement » : $<$ ou $>$.

Situation 3 : écrire la loi et vérifier la somme

« La loi de X est donnée par le tableau suivant. Vérification : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. »

Situation 4 : obtenir la loi à partir d'un arbre

« Les tirs sont indépendants : on multiplie le long d'un chemin. Deux chemins réalisent $\{X = 1\}$: $P(X = 1) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,42$. »

Pour construire l'arbre, voir la rédaction du chapitre 9.

Situation 5 : calculer l'espérance

$$\ll E(X) = \sum x_i p_i = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \gg$$

Situation 6 : interpréter l'espérance

« En moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur gagne 0,50 € par partie. »

L'espérance n'est pas le résultat d'une seule partie.

Situation 7 : étudier un jeu équitable et la mise

« Soit R la somme reçue. $E(R) = 2,5$ €. Le gain algébrique est $G = R - m$, d'espérance $E(R) - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, donc pour $m = 2,5$ €. »

Situation 8 : utiliser la linéarité de l'espérance

« $G = 2D - 5$. Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 2E(D) - 5 = 2 \times 3,5 - 5 = 2$. »

Cite la propriété : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Situation 9 : calculer la variance avec König-Huygens

« $E(X^2) = \frac{7}{2}$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$. »

Situation 10 : donner et interpréter l'écart type

« $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80$ €. Les gains s'écartent en moyenne d'environ 1,80 € de leur espérance. »

Situation 11 : trouver une loi avec paramètres

« La somme vaut 1 : $a + b = 0,6$. L'espérance vaut 1,5 : $a + 2b = 0,9$. On soustrait : $b = 0,3$, puis $a = 0,3$. Vérification : la somme des probabilités vaut bien 1. »

Situation 12 : comparer deux dispersions

« Les deux jeux ont la même espérance, 10 €. Comme $\sigma(X_B) \approx 3,54 < \sigma(X_A) = 10$, les gains du jeu B sont moins dispersés : le jeu B est moins risqué. »

Situation 13 : rédiger la démonstration de König-Huygens

« Soit $\mu = E(X)$. $V(X) = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$. Or $\sum p_i x_i^2 = E(X^2)$, $\sum p_i x_i = \mu$ et $\sum p_i = 1$. Donc $V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$. »

La démonstration de $E(aX + b) = aE(X) + b$ se rédige de même : $\sum (ax_i + b)p_i = a \sum x_i p_i + b \sum p_i$.

Situation 14 : écrire et commenter une simulation

« `moyenne(n)` simule n gains et renvoie leur moyenne m . Pour $n = 100$, on a obtenu $m = 0,7$: l'écart avec $\mu = 0,5$ est $0,2$. Lors de plusieurs exécutions, m varie ; on observe qu'elle est en général plus proche de μ quand n augmente. »

Parle d'**observation**, jamais de preuve.

2. Les erreurs qui coûtent des points

- Oublier une valeur possible de X .
- Ne pas vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
- Oublier de mettre au carré dans $E(X^2)$, ou écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)$.
- Donner la variance quand on demande l'écart type.
- Oublier le signe d'une perte dans un jeu.
- Ne pas interpréter l'espérance.

Check-list avant de rendre la copie

- J'ai **défini** X avec son unité et ses valeurs.
- J'ai **vérifié** que la somme vaut 1.
- J'ai **cité** la formule utilisée.
- J'ai **interprété** le résultat avec l'unité.
- Pour une simulation, j'ai parlé d'**observation** et non de preuve.

Un correcteur qui voit « $E(X) = 0,5$ » avec la formule citée et la phrase d'interprétation sourit. Sans la phrase, il se demande si $0,5$ est un prix, un âge ou une température.