

Variables aléatoires**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : QCM répondu au hasard

Un QCM comporte 4 questions. Pour chacune, trois réponses sont proposées et une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire 0,5 point. On note X le nombre de bonnes réponses et N la note obtenue (sur 4 questions, éventuellement négative).

1. Justifier que X est le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.
2. Combien de chemins de l'arbre comportent exactement 2 succès ? Donner la loi de X sous forme de tableau et vérifier la somme.
3. Calculer $E(X)$, puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens.
4. Exprimer N en fonction de X . En déduire $E(N)$. Donner la loi de N , puis calculer $V(N)$ et $\sigma(N)$. Que peut-on dire de ce QCM ?
5. Calculer la probabilité que la note soit strictement positive.

Exercice S2 : Deux jetons tirés sans remise

Une urne contient 5 jetons : deux numérotés 1, un numéroté 2 et deux numérotés 3. On tire successivement deux jetons sans remise et on note S la somme des deux numéros obtenus.

1. Construire l'arbre pondéré de l'expérience. Pourquoi les deux tirages ne sont-ils pas indépendants ?
2. Déterminer la loi de S et vérifier la somme.
3. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
4. Un joueur mise 3 € et reçoit S euros. On note G son gain algébrique. Donner la loi de G , puis $E(G)$ et $V(G)$.
5. Sachant que S est pair, quelle est la probabilité que $S = 4$?

Exercice S3 : Un lot à déterminer

Un forain dispose de 10 cartes retournées : 1 carte « Super », 3 cartes « Bonus » et 6 cartes vides. Le joueur mise 3 € puis retourne une carte au hasard. Il reçoit a euros avec la carte Super, 4 € avec une carte Bonus et rien avec une carte vide. On note G le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de G en fonction de a .
2. Montrer que $E(G) = 0,1a - 1,8$.
3. Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable ? Pour la question 4, on prend cette valeur.
4. Calculer $V(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondi au centième).
5. Le forain choisit finalement $a = 15$. Quel gain peut-il espérer, en moyenne, sur 400 parties ?

Exercice S4 : Un archer et une probabilité inconnue

Un archer tire 3 flèches, indépendamment les unes des autres. À chaque tir, il atteint la cible avec une probabilité p inconnue. On note X le nombre de flèches qui atteignent la cible. On sait que $P(X = 0) = 0,064$.

1. Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de $q = 1 - p$. En déduire q , puis p .
2. Donner la loi de X et vérifier la somme.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Calculer $P(X \geq 2)$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, justifier que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible en n tirs est $1 - 0,4^n$.
5. On exécute le programme suivant.

```
n = 1
while 1 - 0.4 ** n < 0.99:
    n = n + 1
```

```
print(n)
```

Quelle valeur affiche-t-il ? Interpréter ce résultat dans le contexte.

Exercice S5 : Contrôle qualité et simulation

Dans une production importante, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres (on assimile le prélèvement à un schéma de Bernoulli). On prélève 4 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. L'arbre comporte 16 chemins. Combien contiennent exactement k succès, pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$? (Justifier pour $k = 2$ en écrivant les chemins.)
2. Donner la loi de X (valeurs exactes), puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
3. On donne le programme Python suivant.

```
from random import random
from math import sqrt

def X():
    return sum(1 for _ in range(4) if random() < 0.3)

def moyenne(n):
    return sum(X() for _ in range(n)) / n
```

Écrire une fonction `proportion(N, n, mu, sigma)` qui simule N échantillons de taille n et renvoie la proportion de ceux dont la moyenne m vérifie $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. Pour $n = 100$, calculer l'intervalle $\left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ avec les valeurs de la question 2 (bornes arrondies au millièm). Une exécution de `proportion(1000, 100, 1.2, sqrt(0.84))` a affiché 0.957. Ce résultat est-il cohérent avec le cours ?

Exercice S6 : Un match en deux manches gagnantes

Léa et Hugo disputent un match en deux manches gagnantes : le match s'arrête dès qu'un des joueurs a remporté deux manches. À chaque manche, Léa gagne avec la probabilité 0,6, indépendamment des autres manches. On note N le nombre de manches jouées.

1. Construire l'arbre pondéré du match. Quelles sont les valeurs possibles de N ?
2. Montrer que $P(N = 2) = 0,52$ et donner la loi de N .
3. Calculer $E(N)$ et $V(N)$.
4. Montrer que la probabilité que Léa gagne le match est 0,648.
5. Sachant que le match a duré trois manches, quelle est la probabilité que Léa l'ait gagné ?
6. Chaque manche jouée rapporte 120 € de recettes au club. Donner la loi de la recette R , puis calculer son espérance et son écart type (arrondi au centime).

Exercice S7 : Un dé truqué

Un dé à six faces est truqué : en notant X le numéro obtenu, la probabilité de la face k est proportionnelle à k , soit $P(X = k) = ck$ pour $k = 1, \dots, 6$, avec c constant.

1. Déterminer c .
2. Donner la loi de X et calculer $P(X \text{ pair})$ et $P(X \geq 4)$.
3. Calculer $E(X)$ puis $E(X^2)$, et en déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième). Comparer $E(X)$ à l'espérance d'un dé équilibré.
4. Compléter le script pour qu'il affiche $E(X)$ et $V(X)$:

```
loi = [(k, ..... ) for k in range(1, 7)]
E = sum(x * p for x, p in loi)
```

```
E2 = sum(..... for x, p in loi)
V = .....
print(E, V)
```

Exercice S8 : Une fonction du second degré associée à X

Soit X la variable aléatoire de loi :

x_i	1	3	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Pour tout réel t , on pose $g(t) = E((X - t)^2) = \sum p_i (x_i - t)^2$.

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$.
2. Calculer $g(0)$ et $g(3)$ à partir de la définition. Comparer avec $E(X^2)$ et $V(X)$.
3. Montrer que, pour tout réel t , $g(t) = t^2 - 2E(X)t + E(X^2)$, puis que $g(t) = t^2 - 6t + 11$.
4. Étudier les variations de g à l'aide de la forme canonique. Pour quelle valeur de t le minimum est-il atteint, et que vaut-il ? Interpréter.
5. Cas général. Soit X une variable aléatoire quelconque, de loi $(x_i; p_i)$ et d'espérance μ . Montrer que $g(t) = V(X) + (t - \mu)^2$. Que peut-on en conclure sur $E(X)$?

Exercice S9 : Une variable aléatoire comme fonction sur l'univers

On lance un dé rouge et un dé bleu, équilibrés à six faces. L'univers est le produit cartésien $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ des couples $(r; b)$, tous équiprobables. On note X la variable aléatoire définie sur Ω par $X(r; b) = \max(r; b)$, le plus grand des deux nombres.

1. Donner $\text{Card}(\Omega)$, puis calculer $X(2; 5)$, $X(4; 4)$ et $X(6; 1)$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2. Écrire en extension l'événement $\{X \leq 2\}$ et donner sa probabilité. Justifier que $\{X \leq 2\} \subset \{X \leq 3\}$, puis écrire en extension l'événement $\{X = 3\}$ et en déduire $P(X = 3)$.
3. Pour $k \in \{1; \dots; 6\}$, montrer que $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$, puis que $P(X = k) = \frac{2k - 1}{36}$. Présenter la loi de X dans un tableau et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Traduire par une phrase les écritures $P(X \leq 4)$ et $P(X \geq 5)$, puis les calculer. Écrire avec les notations de l'énoncé « la probabilité que le plus grand des deux résultats soit exactement 6 » et la calculer.
5. Calculer $E(X)$ (valeur exacte, puis arrondie au centième). Un joueur mise 4 € et reçoit X euros : calculer l'espérance de son gain algébrique G . Le jeu est-il équitable ? Quelle mise le rendrait équitable ?

Exercice S10 : Fréquence des lettres d'un texte (Python)

On considère le programme suivant, où le texte est écrit en minuscules et sans accent. On rappelle que $\text{ord}('a')$ vaut 97, $\text{ord}('b')$ vaut 98, et ainsi de suite.

```
def frequences(texte):
    comptes = [0] * 26
    for c in texte:
        if 'a' <= c <= 'z':
            comptes[ord(c) - ord('a')] += 1
    n = sum(comptes)
    return [k / n for k in comptes]
```

1. Que contient `comptes[0]` ? `comptes[4]` ? Pour le texte "mathematiques", donner `comptes[0]`, `comptes[4]`, `comptes[12]`, `comptes[19]` et la valeur de `n`. Pourquoi la somme des éléments de la liste renvoyée par `frequences` vaut-elle 1 ?

2. On tire au hasard, de façon équiprobable, l'une des 13 lettres de "mathematiques" et on note X son rang dans l'alphabet ($a = 1, b = 2, \dots, z = 26$). Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.
3. Écrire une fonction `rang_moyen(texte)` qui renvoie $E(X)$ pour un texte quelconque, en utilisant `frequencies`.
4. Dans un long texte français, la lettre la plus fréquente est « e » (environ 14,7 % des lettres). Écrire une fonction `lettre_frequente(texte)` qui renvoie la lettre la plus fréquente. Que renvoie-t-elle pour "mathematiques" ?
5. On exécute les instructions suivantes.

```
f = frequencies("mathematiques")
presentes = []
for i in range(26):
    if f[i] > 0:
        presentes.append(chr(ord('a') + i))
presentes.remove('a')
print(presentes, len(presentes))
```

Quel est le contenu de la liste `presentes` avant l'instruction `remove` ? Qu'affiche le programme ?