

Corrigé : Variables aléatoires

Fiche Standard

S1.

- Chaque réponse est une épreuve de Bernoulli (succès : bonne réponse), de probabilité $p = \frac{1}{3}$. Le candidat répond au hasard et indépendamment, donc les 4 épreuves sont indépendantes et identiques. X est le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli avec $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$.
- Les chemins à 2 succès sont ceux qui placent les deux succès parmi les 4 positions : $SS\bar{S}\bar{S}$, $S\bar{S}SS$, $\bar{S}SS\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}SS$, soit 6 chemins. De même il y a 1, 4, 6, 4, 1 chemins pour $k = 0, \dots, 4$.

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, \quad P(X=1) = 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}, \quad P(X=2) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81},$$

$$P(X=3) = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}, \quad P(X=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Somme : $\frac{16+32+24+8+1}{81} = \frac{81}{81} = 1$.

$$3. E(X) = \frac{32 + 2 \times 24 + 3 \times 8 + 4 \times 1}{81} = \frac{32 + 48 + 24 + 4}{81} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}.$$

$$E(X^2) = \frac{32 + 4 \times 24 + 9 \times 8 + 16 \times 1}{81} = \frac{32 + 96 + 72 + 16}{81} = \frac{216}{81} = \frac{8}{3}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{24-16}{9} = \frac{8}{9}.$$

- Sur 4 questions, il y a X bonnes réponses et $4 - X$ mauvaises : $N = X - 0,5(4 - X) = 1,5X - 2$. Par linéarité de l'espérance, $E(N) = 1,5E(X) - 2 = 1,5 \times \frac{4}{3} - 2 = 0$. Loi de N : les valeurs de N pour $X = 0, 1, 2, 3, 4$ sont $-2, -0,5, 1, 2,5, 4$, avec les probabilités de X .

n_i	-2	-0,5	1	2,5	4
$P(N=n_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$E(N^2) = \frac{4 \times 16 + 0,25 \times 32 + 1 \times 24 + 6,25 \times 8 + 16 \times 1}{81} = \frac{64 + 8 + 24 + 50 + 16}{81} = \frac{162}{81} = 2,$$

donc $V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = 2 - 0 = 2$ et $\sigma(N) = \sqrt{2} \approx 1,41$. L'espérance de la note est nulle : répondre au hasard ne rapporte rien en moyenne, ce qui est le but du barème négatif.

- $N > 0 \iff 1,5X > 2 \iff X \geq 2$ (car X est entier : pour $X = 1$, $N = -0,5$; pour $X = 2$, $N = 1$). Donc $P(N > 0) = P(X \geq 2) = \frac{24+8+1}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27} \approx 0,41$.

Conclusion : $E(N) = 0$, $\sigma(N) = \sqrt{2}$ et la probabilité d'une note strictement positive est $\frac{11}{27}$.

S2.

- Au premier tirage : $P(1) = \frac{2}{5}$, $P(2) = \frac{1}{5}$, $P(3) = \frac{2}{5}$. Au second tirage, il reste 4 jetons ; par exemple après un 1 : $P(1) = \frac{1}{4}$, $P(2) = \frac{1}{4}$, $P(3) = \frac{2}{4}$; après un 2 : $P(1) = \frac{2}{4}$, $P(3) = \frac{2}{4}$; après un 3 : $P(1) = \frac{2}{4}$, $P(2) = \frac{1}{4}$, $P(3) = \frac{1}{4}$. Les probabilités du second tirage dépendent du résultat du premier : les tirages ne sont pas indépendants.

- S prend les valeurs 2 à 6.

$$P(S=2) = P(1,1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

$$P(S=3) = P(1,2) + P(2,1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

$$P(S=4) = P(1,3) + P(3,1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$P(S=5) = P(2,3) + P(3,2) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

$$P(S=6) = P(3,3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

s	2	3	4	5	6
$P(S=s)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Somme : $0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 + 0,1 = 1$.

3. $E(S) = 0,2 + 0,6 + 1,6 + 1 + 0,6 = 4$. $E(S^2) = 0,4 + 1,8 + 6,4 + 5 + 3,6 = 17,2$. Donc $V(S) = 17,2 - 4^2 = 1,2$.
4. $G = S - 3$ prend les valeurs $-1, 0, 1, 2, 3$ avec les probabilités de S .

g_i	-1	0	1	2	3
$P(G = g_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,2$	$0,1$

$E(G) = -0,1 + 0 + 0,4 + 0,4 + 0,3 = 1$ (on retrouve $E(S) - 3$ par linéarité). $E(G^2) = 0,1 + 0 + 0,4 + 0,8 + 0,9 = 2,2$, donc $V(G) = 2,2 - 1^2 = 1,2$. Le jeu est favorable au joueur.

5. L'événement « S est pair » est $\{S = 2\} \cup \{S = 4\} \cup \{S = 6\}$, de probabilité $0,1 + 0,4 + 0,1 = 0,6$.
Alors $P_{S \text{ pair}}(S = 4) = \frac{P(S = 4)}{P(S \text{ pair})} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$.

Conclusion : $E(S) = 4$, $V(S) = 1,2$, $E(G) = 1$ et $P_{S \text{ pair}}(S = 4) = \frac{2}{3}$.

S3.

1. Les 10 cartes sont équiprobables. Carte Super : gain $a - 3$, probabilité $0,1$. Carte Bonus : gain $4 - 3 = 1$, probabilité $0,3$. Carte vide : gain -3 , probabilité $0,6$.

g_i	$a - 3$	1	-3
$P(G = g_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,6$

2. $E(G) = 0,1(a - 3) + 0,3 \times 1 + 0,6 \times (-3) = 0,1a - 0,3 + 0,3 - 1,8 = 0,1a - 1,8$.
3. $E(G) = 0 \iff 0,1a = 1,8 \iff a = 18$.
4. Pour $a = 18$: G vaut 15 (prob. $0,1$), 1 ($0,3$), -3 ($0,6$). $E(G) = 1,5 + 0,3 - 1,8 = 0$ (cohérent).
 $E(G^2) = 225 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 9 \times 0,6 = 22,5 + 0,3 + 5,4 = 28,2$. Donc $V(G) = 28,2 - 0^2 = 28,2$ et $\sigma(G) = \sqrt{28,2} \approx 5,31$ €.
5. Pour $a = 15$: $E(G) = 1,5 - 1,8 = -0,3$. Le joueur perd $0,30$ € en moyenne par partie, donc le forain gagne en moyenne $0,30$ €. Sur 400 parties : $400 \times 0,3 = 120$ €.

Conclusion : le jeu est équitable pour $a = 18$ (alors $\sigma(G) \approx 5,31$ €) ; avec $a = 15$, le forain espère 120 € sur 400 parties.

S4.

1. Les tirs sont indépendants : $P(X = 0) = q^3$. Donc $q^3 = 0,064$. Comme $0,4^3 = 0,064$ et que la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante, $q = 0,4$ et $p = 0,6$.
2. $P(X = 0) = 0,4^3 = 0,064$; $P(X = 1) = 3 \times 0,6 \times 0,4^2 = 0,288$; $P(X = 2) = 3 \times 0,6^2 \times 0,4 = 0,432$; $P(X = 3) = 0,6^3 = 0,216$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$0,064$	$0,288$	$0,432$	$0,216$

Somme : $0,064 + 0,288 + 0,432 + 0,216 = 1$.

3. $E(X) = 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 0,288 + 0,864 + 0,648 = 1,8$. $E(X^2) = 0,288 + 4 \times 0,432 + 9 \times 0,216 = 0,288 + 1,728 + 1,944 = 3,96$, donc $V(X) = 3,96 - 1,8^2 = 3,96 - 3,24 = 0,72$. Enfin $P(X \geq 2) = 0,432 + 0,216 = 0,648$.
4. L'événement contraire de « au moins une flèche atteint la cible » est « aucune flèche n'atteint la cible ». Les tirs étant indépendants, sa probabilité est $0,4^n$. Donc $P = 1 - 0,4^n$.
5. La boucle s'arrête dès que $1 - 0,4^n \geq 0,99$. On a $1 - 0,4^5 = 1 - 0,01024 = 0,98976 < 0,99$ et $1 - 0,4^6 = 1 - 0,004096 = 0,995904 \geq 0,99$ (la suite $0,4^n$ est décroissante, donc les valeurs de n inférieures à 5 ne conviennent pas non plus). Le programme affiche 6.

Conclusion : $p = 0,6$, $E(X) = 1,8$, $V(X) = 0,72$, $P(X \geq 2) = 0,648$; il faut au moins 6 tirs pour atteindre la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à $0,99$.

S5.

1. Un chemin est un mot de 4 lettres S ou $\bar{S}$. Pour $k = 2$, on place les deux $S : S\bar{S}\bar{S}\bar{S}, \bar{S}\bar{S}S\bar{S}, \bar{S}\bar{S}\bar{S}S, \bar{S}S\bar{S}\bar{S}, S\bar{S}S\bar{S}, S\bar{S}\bar{S}S : 6$ chemins. Pour $k = 0, 1, 2, 3, 4 : 1, 4, 6, 4, 1$ chemins (total 16).
2. $q = 0,7$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

En effet : $0,7^4 = 0,2401$; $4 \times 0,3 \times 0,7^3 = 0,4116$; $6 \times 0,3^2 \times 0,7^2 = 0,2646$; $4 \times 0,3^3 \times 0,7 = 0,0756$; $0,3^4 = 0,0081$. Somme = 1.

$E(X) = 0,4116 + 0,5292 + 0,2268 + 0,0324 = 1,2$; $E(X^2) = 0,4116 + 4 \times 0,2646 + 9 \times 0,0756 + 16 \times 0,0081 = 0,4116 + 1,0584 + 0,6804 + 0,1296 = 2,28$; $V(X) = 2,28 - 1,44 = 0,84$; $\sigma(X) = \sqrt{0,84} \approx 0,92$.

3.

```
def proportion(N, n, mu, sigma):
    ok = 0
    for _ in range(N):
        if abs(moyenne(n) - mu) <= 2 * sigma / sqrt(n):
            ok = ok + 1
    return ok / N
```

4. Pour $n = 100$, $\mu = 1,2$ et $\sigma = \sqrt{0,84} \approx 0,9165$: $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 0,9165}{10} \approx 0,183$. L'intervalle est $[1,017 ; 1,383]$. La valeur 0,957 est proche de 0,95 : c'est cohérent avec le cours, selon lequel environ 95 % des moyennes d'échantillons de taille n se trouvent à moins de $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de l'espérance.

Conclusion : $E(X) = 1,2$, $V(X) = 0,84$, $\sigma(X) \approx 0,92$ et, pour $n = 100$, la moyenne d'un échantillon se trouve dans $[1,017 ; 1,383]$ dans environ 95 % des cas.

S6.

1. On note L (Léa gagne la manche) et H (Hugo gagne la manche). Les chemins sont LL (probabilité $0,6 \times 0,6$), HH ($0,4 \times 0,4$), puis, si les deux joueurs ont gagné une manche chacun, une troisième manche décisive : LHL , LHH , HLL , HLH (de probabilités respectives $0,6 \times 0,4 \times 0,6$, $0,6 \times 0,4 \times 0,4$, $0,4 \times 0,6 \times 0,6$, $0,4 \times 0,6 \times 0,4$). Le match dure 2 ou 3 manches : $N \in \{2, 3\}$.
2. $N = 2$ si le match s'arrête après deux manches, c'est-à-dire LL ou HH : $P(N = 2) = 0,6^2 + 0,4^2 = 0,36 + 0,16 = 0,52$. Donc $P(N = 3) = 1 - 0,52 = 0,48$.

n_i	2	3
$P(N = n_i)$	0,52	0,48

3. $E(N) = 2 \times 0,52 + 3 \times 0,48 = 1,04 + 1,44 = 2,48$. $E(N^2) = 4 \times 0,52 + 9 \times 0,48 = 2,08 + 4,32 = 6,4$. $V(N) = 6,4 - 2,48^2 = 6,4 - 6,1504 = 0,2496$.
4. Léa gagne en deux manches avec LL : 0,36. Elle gagne en trois manches avec LHL ou HLL : $2 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 2 \times 0,144 = 0,288$. Donc $P(\text{Léa gagne}) = 0,36 + 0,288 = 0,648$.
5. Notons A « Léa gagne le match » et B « $N = 3$ ». $P(A \cap B) = 0,288$ et $P(B) = 0,48$, donc $P_B(A) = \frac{0,288}{0,48} = 0,6$.
6. $R = 120N$ vaut 240 € si $N = 2$ et 360 € si $N = 3$.

r_i	240	360
$P(R = r_i)$	0,52	0,48

$E(R) = 240 \times 0,52 + 360 \times 0,48 = 124,8 + 172,8 = 297,6$ € (c'est $120 E(N)$). $E(R^2) = 240^2 \times 0,52 + 360^2 \times 0,48 = 29\,952 + 62\,208 = 92\,160$, donc $V(R) = 92\,160 - 297,6^2 = 92\,160 - 88\,565,76 = 3\,594,24$ et $\sigma(R) = \sqrt{3\,594,24} \approx 59,95$ €.

Conclusion : $E(N) = 2,48$, $V(N) = 0,2496$, $P(\text{Léa gagne}) = 0,648$, $P_B(A) = 0,6$, $E(R) = 297,60$ € et $\sigma(R) \approx 59,95$ €.

S7.

1. La somme des probabilités vaut 1 : $c(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21c = 1$, donc $c = \frac{1}{21}$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$P(X \text{ pair}) = \frac{2 + 4 + 6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}; P(X \geq 4) = \frac{4 + 5 + 6}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

3. $E(X) = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$; $E(X^2) = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + 6^3}{21} = \frac{1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216}{21} = \frac{441}{21} = 21$. Donc $V(X) = 21 - \frac{169}{9} = \frac{189 - 169}{9} = \frac{20}{9}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{20}}{3} \approx 1,49$. Pour un dé équilibré, $E = 3,5 < \frac{13}{3} \approx 4,33$: le truquage favorise les grandes faces.

4. loi = [(k, k / 21) for k in range(1, 7)]

E = sum(x * p for x, p in loi)

E2 = sum(x ** 2 * p for x, p in loi)

V = E2 - E ** 2

print(E, V)

Le script affiche des valeurs proches de 4,333 et 2,222 (à l'arrondi flottant près).

Conclusion : $c = \frac{1}{21}$, $E(X) = \frac{13}{3}$, $V(X) = \frac{20}{9}$, $\sigma(X) \approx 1,49$.

S8.

1. $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = 3$. $E(X^2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{2} + \frac{25}{4} = 11$. $V(X) = 11 - 3^2 = 2$.
2. $g(0) = \frac{1}{4} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{1}{4} \times 5^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{2} + \frac{25}{4} = 11$, c'est-à-dire $E(X^2)$. $g(3) = \frac{1}{4} \times (1 - 3)^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{4} \times (5 - 3)^2 = 1 + 0 + 1 = 2$, c'est-à-dire $V(X)$.
3. $g(t) = \sum p_i (x_i^2 - 2tx_i + t^2) = \sum p_i x_i^2 - 2t \sum p_i x_i + t^2 \sum p_i = E(X^2) - 2tE(X) + t^2$, car $\sum p_i = 1$. Avec les valeurs de la question 1 : $g(t) = t^2 - 6t + 11$.
4. $g(t) = (t - 3)^2 + 2$. La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$ et strictement croissante sur $[3; +\infty[$: son minimum est atteint en $t = 3 = E(X)$ et vaut $2 = V(X)$.
5. $g(t) = E(X^2) - 2\mu t + t^2 = (E(X^2) - \mu^2) + (t^2 - 2\mu t + \mu^2) = V(X) + (t - \mu)^2$ d'après la formule de König-Huygens. Comme $(t - \mu)^2 \geq 0$, on a $g(t) \geq V(X)$ avec égalité si et seulement si $t = \mu$. Ainsi $E(X)$ est le réel t qui rend minimal l'écart quadratique moyen $E((X - t)^2)$, et ce minimum est la variance.

Conclusion : $g(t) = t^2 - 6t + 11 = (t - 3)^2 + 2$, minimum $2 = V(X)$ en $t = E(X) = 3$; en général $g(t) = V(X) + (t - E(X))^2$.

S9.

1. $\text{Card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. $X(2; 5) = 5$, $X(4; 4) = 4$, $X(6; 1) = 6$. Le plus grand des deux nombres est un entier de 1 à 6, et toutes ces valeurs sont atteintes (par exemple $X(k; k) = k$) : l'ensemble des valeurs de X est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
2. $\{X \leq 2\} = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$, de cardinal 4, donc $P(X \leq 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Si le plus grand des deux nombres est inférieur ou égal à 2, il est inférieur ou égal à 3 : $\{X \leq 2\} \subset \{X \leq 3\}$. L'événement $\{X = 3\}$ est formé des couples de $\{X \leq 3\}$ qui ne sont pas dans $\{X \leq 2\}$: $\{X = 3\} = \{(1; 3), (2; 3), (3; 3), (3; 1), (3; 2)\}$, de cardinal 5, donc $P(X = 3) = \frac{5}{36}$ (on vérifie $\frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$).
3. $\{X \leq k\}$ est l'ensemble des couples dont les deux nombres sont inférieurs ou égaux à k : c'est $\{1; \dots; k\} \times \{1; \dots; k\}$, de cardinal k^2 . Donc $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$. Pour $k \geq 1$, $\{X = k\} = \{X \leq k\} \setminus \{X \leq k - 1\}$ avec $\{X \leq k - 1\} \subset \{X \leq k\}$, donc $P(X = k) = \frac{k^2 - (k - 1)^2}{36} = \frac{2k - 1}{36}$ (avec $\{X \leq 0\} = \emptyset$ pour $k = 1$).

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\text{Somme : } \frac{1+3+5+7+9+11}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

4. $P(X \leq 4)$ est la probabilité que le plus grand des deux résultats soit au plus égal à 4, c'est-à-dire que les deux dés donnent au plus 4 : $P(X \leq 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. $P(X \geq 5)$ est la probabilité que le plus grand des deux résultats soit au moins égal à 5, c'est-à-dire qu'au moins un dé donne 5 ou 6 : $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. « Le plus grand des deux résultats est exactement 6 » s'écrit $\{X = 6\}$ et $P(X = 6) = \frac{11}{36}$.

$$5. E(X) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

Le gain algébrique est $G = X - 4$, donc $E(G) = \frac{161}{36} - 4 = \frac{17}{36} \approx 0,47$ €. L'espérance est strictement positive : le jeu n'est pas équitable, il est favorable au joueur. Il serait équitable pour une mise de $\frac{161}{36} \approx 4,47$ €.

Conclusion : $P(X = k) = \frac{2k-1}{36}$; $E(X) = \frac{161}{36} \approx 4,47$; avec une mise de 4 € le jeu est favorable au joueur ($E(G) = \frac{17}{36}$ €).

S10.

1. `comptes[k]` est le nombre d'occurrences de la lettre de rang k (en commençant à 0) : `comptes[0]` compte les « a » et `comptes[4]` compte les « e ». Pour "mathematiques" : 2 lettres « a », 2 « e », 2 « m », 2 « t », 1 « h », 1 « i », 1 « q », 1 « s » et 1 « u ». Donc `comptes[0]`, `comptes[4]`, `comptes[12]` et `comptes[19]` valent 2, et `n` vaut $2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$. La somme des éléments de la liste renvoyée est $\frac{\text{somme des comptes}}{n} = \frac{n}{n} = 1$.
2. Les rangs possibles sont 1 (a), 5 (e), 8 (h), 9 (i), 13 (m), 17 (q), 19 (s), 20 (t) et 21 (u).

k	1	5	8	9	13	17	19	20	21
$P(X = k)$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

La somme vaut $\frac{13}{13} = 1$.

$$E(X) = \frac{2 \times 1 + 2 \times 5 + 8 + 9 + 2 \times 13 + 17 + 19 + 2 \times 20 + 21}{13} = \frac{2 + 10 + 8 + 9 + 26 + 17 + 19 + 40 + 21}{13} = \frac{152}{13} \approx 11,69.$$

3. On parcourt la liste des fréquences avec ses indices (le rang est l'indice augmenté de 1).

```
def rang_moyen(texte):
    f = frequences(texte)
    return sum((i + 1) * f[i] for i in range(26))
```

4. On cherche l'indice du maximum de la liste des fréquences.

```
def lettre_frequente(texte):
    f = frequences(texte)
    return chr(ord('a') + f.index(max(f)))
```

Pour "mathematiques", le maximum $\frac{2}{13}$ est atteint pour « a », « e », « m » et « t » ; `index` renvoie la première position, donc la fonction renvoie 'a'.

5. La boucle parcourt les indices de 0 à 25 et ajoute à la liste, par `append`, la lettre de chaque indice dont la fréquence est strictement positive, c'est-à-dire chaque lettre présente dans le texte, dans l'ordre alphabétique : avant `remove`, `presentes` vaut ['a', 'e', 'h', 'i', 'm', 'q', 's', 't', 'u'] (neuf lettres). L'instruction `remove('a')` supprime la lettre « a ». Le programme affiche

```
['e', 'h', 'i', 'm', 'q', 's', 't', 'u'] 8
```

Conclusion : $n = 13$; $E(X) = \frac{152}{13} \approx 11,69$; `lettre_frequente("mathematiques")` renvoie 'a'.