

Variables aléatoires**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Les formules du cours : démonstrations

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs distinctes $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_i = P(X = x_i) > 0$ et $\sum p_i = 1$. On note $\mu = E(X) = \sum p_i x_i$ et $V(X) = \sum p_i (x_i - \mu)^2$. Pour a, b réels, $E(aX + b) = \sum p_i (ax_i + b)$ et $V(aX + b) = \sum p_i (ax_i + b - E(aX + b))^2$ (ces formules restent valables même si certaines valeurs $ax_i + b$ coïncident).

- Démontrer que $E(aX + b) = a\mu + b$.
- Démontrer la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - \mu^2$, avec $E(X^2) = \sum p_i x_i^2$.
- (Pour aller plus loin, hors programme.) Démontrer que $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Montrer que $V(X) \geq 0$, puis que $V(X) = 0$ si et seulement si X ne prend qu'une seule valeur.
- (Pour aller plus loin, hors programme.) On suppose que toutes les valeurs x_i sont dans l'intervalle $[m; M]$.
 - Justifier que $(x_i - m)(M - x_i) \geq 0$ pour tout i .
 - En multipliant par p_i et en sommant, montrer que $E(X^2) \leq (M + m)\mu - mM$.
 - En déduire que $V(X) \leq (M - \mu)(\mu - m)$, puis que $V(X) \leq \frac{(M - m)^2}{4}$.

Exercice D2 : Deux dés qui imitent deux dés

On considère deux dés équilibrés à six faces, mais non cubiques ordinaires : le dé A porte les numéros 1, 2, 2, 3, 3, 4 et le dé B les numéros 1, 3, 4, 5, 6, 8. On lance les deux dés, de façon indépendante, et on note S la somme des deux numéros.

- Combien y a-t-il d'issues équiprobables ? Dresser le tableau des sommes possibles (lignes : les valeurs distinctes de A ; colonnes : les faces de B).
- En déduire la loi de S .
- Montrer que S a la même loi que la somme de deux dés cubiques ordinaires.
- Calculer $E(A)$ et $E(B)$ ainsi que $E(S)$. Que constate-t-on ? Un dé ordinaire a-t-il la même loi que A ou que B ?

Exercice D3 : Fléchettes : un problème complet

Dans un club de fléchettes, 40 % des joueurs sont débutants et 60 % sont confirmés. À chaque lancer, un débutant atteint la cible avec la probabilité 0,2 et un confirmé avec la probabilité 0,5, les lancers d'un même joueur étant indépendants. On choisit un joueur au hasard et on lui fait lancer 3 fléchettes. On note D l'événement « le joueur est débutant » et X le nombre de lancers qui atteignent la cible.

- Justifier que, sachant D , X est le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli et donner $P_D(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Donner de même $P_{\overline{D}}(X = k)$.
- Montrer que la loi de X est donnée par le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,2798	0,3786	0,2634	0,0782

- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
- Le joueur n'a atteint la cible avec aucune des trois fléchettes. Quelle est la probabilité qu'il soit débutant (arrondie au millièmme) ?
- Calculer la probabilité p' que la première fléchette d'un joueur choisi au hasard atteigne la cible. On suppose par erreur que les trois lancers de ce joueur sont indépendants et atteignent chacun la cible avec la probabilité p' . Calculer alors $P(X = 0)$ et conclure. Quelle hypothèse du schéma de Bernoulli n'est pas vérifiée pour X ?
- Le joueur reçoit 5 € par fléchette qui atteint la cible, et il a payé 6 € pour participer. Donner la loi de son gain algébrique G , puis son espérance et son écart type (arrondi au centième).

Exercice D4 : Un jeu de pile ou face à nombre de lancers limité

On lance une pièce équilibrée au plus 4 fois, en s'arrêtant dès que pile apparaît. Si pile apparaît pour la première fois au k -ième lancer, le joueur reçoit 2^k euros. Si pile n'apparaît pas en 4 lancers, il ne reçoit rien. On note X la somme reçue.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$. Quelle mise rend le jeu équitable ?
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
4. Le joueur mise la somme trouvée à la question 2. Avec quelle probabilité réalise-t-il un gain algébrique strictement positif ? strictement négatif ? Commenter.
5. Plus généralement, la pièce est lancée au plus N fois ($N \geq 1$), avec la même règle. Montrer que l'espérance de la somme reçue est N .
6. On considère le programme suivant, qui simule une partie.

```
from random import random
```

```
def partie(N):
    for k in range(1, N + 1):
        if random() < 0.5:
            return 2 ** k
    return 0
```

Écrire une fonction `moyenne(n, N)` qui renvoie la moyenne des sommes reçues sur n parties. Pour $N = 4$ et $n = 100$, donner, bornes arrondies au centième, l'intervalle $\left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ dans lequel la moyenne se trouve avec une probabilité d'environ 0,95.

Exercice D5 : Le problème des partis

Deux joueurs, A et B , disputent une suite de parties indépendantes ; à chaque partie, A gagne avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (pas de partie nulle). Chacun a misé 32 pistoles et le premier qui gagne 3 parties remporte la totalité des 64 pistoles. Le jeu est interrompu alors que A a gagné 2 parties et B une seule. On cherche à partager équitablement les 64 pistoles (problème étudié par Pascal et Fermat en 1654). On note X la somme que recevrait A si le jeu était poursuivi jusqu'à son terme.

1. Combien de parties au plus restent-elles à jouer ? Représenter les parties restantes par un arbre pondéré.
2. Donner la loi de X .
3. Calculer $E(X)$. Quel partage des 64 pistoles est équitable, au sens où chaque joueur reçoit l'espérance de sa part ?
4. Mêmes questions si le jeu est interrompu alors que A a gagné 2 parties et B aucune.
5. On revient à la situation de la question 1, mais A gagne chaque partie avec la probabilité 0,6. Calculer $E(X)$.
6. On revient à la situation de la question 1 avec A et B de forces égales. Le programme suivant simule la fin du jeu.

```
from random import random
```

```
def partie():
    a, b = 2, 1
    while a < 3 and b < 3:
        if random() < 0.5:
            a = a + 1
        else:
            b = b + 1
    if a == 3:
```

```

    return 64
return 0

```

- a) Quelles valeurs la fonction `partie` peut-elle renvoyer? Écrire une fonction `moyenne(n)` qui renvoie la moyenne des résultats de `n` appels de `partie()`. Vers quelle valeur `moyenne(100000)` a-t-elle de fortes chances d'être proche?
- b) Calculer $\sigma(X)$, puis, pour $n = 100$, l'intervalle $\left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ où $\mu = E(X)$ (bornes arrondies au centième).

Exercice D6 : Retrouver une loi à partir de E et V

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1, p_2 (positives ou nulles). On sait que $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 0,56$.

1. Écrire un système de trois équations d'inconnues p_0, p_1, p_2 traduisant ces données (on exprimera $E(X^2)$).
2. Résoudre ce système et vérifier que la solution est bien une loi de probabilité.
3. La variable X peut-elle être le nombre de succès de deux épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, de probabilité de succès p ? (On écrira l'arbre et on comparera $P(X = 2)$ et $P(X = 0)$ avec la loi trouvée.)
4. Existe-t-il une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 1$?

Exercice D7 : Fiabilité d'un système redondant

Un système est constitué de 3 composants identiques qui fonctionnent ou tombent en panne de façon indépendante, chacun fonctionnant avec la probabilité p , où $0 < p < 1$. Le système fonctionne lorsqu'au moins 2 composants fonctionnent. On note X le nombre de composants qui fonctionnent et $q = 1 - p$.

1. Donner la loi de X en fonction de p et q . Montrer que la probabilité que le système fonctionne est $f(p) = 3p^2 - 2p^3$.
2. Montrer que $f(p) - p = p(1 - p)(2p - 1)$. À quelle condition sur p le système est-il plus fiable qu'un composant seul?
3. Calculer $f(0,9)$ et $f(0,4)$. Commenter.
4. Un second système comporte 4 composants identiques de même fiabilité $p = 0,9$ et fonctionne si au moins 2 composants fonctionnent. Calculer sa probabilité de fonctionnement.
5. Pour le système à 3 composants avec $p = 0,9$, sachant que le système fonctionne, déterminer la loi de X puis le nombre moyen de composants en état de marche.