

Corrigé : Variables aléatoires

Fiche Défi

D1.

- $E(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b) = a \sum p_i x_i + b \sum p_i = a\mu + b \times 1 = a\mu + b$.
- $V(X) = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$.
- (Hors programme.) D'après la question 1, $E(aX + b) = a\mu + b$, donc $(ax_i + b) - E(aX + b) = a(x_i - \mu)$. Alors $V(aX + b) = \sum p_i a^2(x_i - \mu)^2 = a^2 \sum p_i(x_i - \mu)^2 = a^2 V(X)$.
- $V(X)$ est une somme de termes $p_i(x_i - \mu)^2 \geq 0$, donc $V(X) \geq 0$. Si X ne prend qu'une valeur x_1 , alors $p_1 = 1$, $\mu = x_1$ et $V(X) = 1 \times (x_1 - x_1)^2 = 0$. Réciproquement, si $V(X) = 0$, une somme de termes positifs est nulle, donc chaque terme est nul : $p_i(x_i - \mu)^2 = 0$ et, comme $p_i > 0$, $x_i = \mu$ pour tout i . Les x_i étant distincts, il n'y a qu'une valeur.
- Comme $m \leq x_i \leq M$, on a $x_i - m \geq 0$ et $M - x_i \geq 0$: leur produit est positif.
 - $p_i(x_i - m)(M - x_i) \geq 0$. Or $(x_i - m)(M - x_i) = -x_i^2 + (M + m)x_i - mM$. En sommant sur i : $-E(X^2) + (M + m)\mu - mM \times 1 \geq 0$, donc $E(X^2) \leq (M + m)\mu - mM$.
 - $V(X) = E(X^2) - \mu^2 \leq (M + m)\mu - mM - \mu^2$. Or $(M - \mu)(\mu - m) = M\mu - Mm - \mu^2 + m\mu = (M + m)\mu - mM - \mu^2$. Donc $V(X) \leq (M - \mu)(\mu - m)$.
Ensuite, $\frac{(M - m)^2}{4} - (M - \mu)(\mu - m) = \left(\mu - \frac{M + m}{2}\right)^2 \geq 0$ (développer les deux membres),
donc $(M - \mu)(\mu - m) \leq \frac{(M - m)^2}{4}$ et $V(X) \leq \frac{(M - m)^2}{4}$.

Conclusion : les trois formules sont démontrées ; $V(X) = 0$ caractérise les variables constantes ; une variable à valeurs dans $[m ; M]$ a une variance au plus égale à $\frac{(M - m)^2}{4}$.

D2.

- Il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables (couples de faces). Les faces 2 et 3 de A figurent chacune deux fois.

$A \backslash B$	1	3	4	5	6	8
1 (une face)	2	4	5	6	7	9
2 (deux faces)	3	5	6	7	8	10
3 (deux faces)	4	6	7	8	9	11
4 (une face)	5	7	8	9	10	12

- Le nombre d'issues donnant la somme s se calcule en pondérant chaque case par le nombre de faces de la ligne (1, 2, 2 ou 1). Par exemple $s = 4$: case (1; 3) pondérée par 1 et case (3; 1) pondérée par 2, soit 3 issues. On obtient :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issues	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Total : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

- Pour deux dés cubiques ordinaires, il y a $s - 1$ couples de somme s pour $2 \leq s \leq 7$ et $13 - s$ pour $7 \leq s \leq 12$, soit exactement les effectifs ci-dessus : même loi.
- $E(A) = \frac{1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4}{6} = \frac{15}{6} = 2,5$ et $E(B) = \frac{1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8}{6} = \frac{27}{6} = 4,5$. Par symétrie de la loi de S autour de 7, $E(S) = 7$. On constate $E(S) = E(A) + E(B)$. Un dé ordinaire a pour espérance 3,5, différente de $E(A)$ et de $E(B)$: ce n'est pas la même loi que A ni que B .

Conclusion : la somme de ces deux dés a la loi de la somme de deux dés ordinaires, alors que chaque dé pris séparément a une loi différente.

D3.

- Sachant D , les 3 lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de

succès 0,2 : X compte les succès d'un schéma de Bernoulli avec $n = 3$, $p = 0,2$, $q = 0,8$. $P_D(X = 0) = 0,8^3 = 0,512$; $P_D(X = 1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$; $P_D(X = 2) = 3 \times 0,2^2 \times 0,8 = 0,096$; $P_D(X = 3) = 0,2^3 = 0,008$.

Sachant $\overline{D}$: $n = 3$, $p = 0,5$: $P_{\overline{D}}(X = k) = 0,125$; $0,375$; $0,375$; $0,125$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

2. $\{D, \overline{D}\}$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $P(X = k) = 0,4 P_D(X = k) + 0,6 P_{\overline{D}}(X = k)$:

$$P(X = 0) = 0,4 \times 0,512 + 0,6 \times 0,125 = 0,2048 + 0,075 = 0,2798;$$

$$P(X = 1) = 0,4 \times 0,384 + 0,6 \times 0,375 = 0,1536 + 0,225 = 0,3786;$$

$$P(X = 2) = 0,4 \times 0,096 + 0,6 \times 0,375 = 0,0384 + 0,225 = 0,2634;$$

$$P(X = 3) = 0,4 \times 0,008 + 0,6 \times 0,125 = 0,0032 + 0,075 = 0,0782.$$

$$\text{Somme : } 0,2798 + 0,3786 + 0,2634 + 0,0782 = 1.$$

3. $E(X) = 0,3786 + 2 \times 0,2634 + 3 \times 0,0782 = 0,3786 + 0,5268 + 0,2346 = 1,14$.

$$E(X^2) = 0,3786 + 4 \times 0,2634 + 9 \times 0,0782 = 0,3786 + 1,0536 + 0,7038 = 2,136.$$

$$V(X) = 2,136 - 1,14^2 = 2,136 - 1,2996 = 0,8364 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{0,8364} \approx 0,91.$$

4. On cherche $P_{\{X=0\}}(D) = \frac{P(D \cap \{X=0\})}{P(X=0)} = \frac{0,4 \times 0,512}{0,2798} = \frac{0,2048}{0,2798} \approx 0,732$.

5. D'après la formule des probabilités totales, $p' = 0,4 \times 0,2 + 0,6 \times 0,5 = 0,08 + 0,30 = 0,38$ (c'est aussi $\frac{E(X)}{3} = \frac{1,14}{3}$). Avec $p' = 0,38$ et $q' = 0,62$, on aurait $P(X = 0) = 0,62^3 = 0,238328$, alors que $P(X = 0) = 0,2798$. Les deux valeurs diffèrent : X ne suit pas un schéma de Bernoulli. Ce sont les lancers de l'ensemble de la population qui ne sont pas indépendants : savoir que le premier lancer a échoué rend plus probable que le joueur soit débutant, donc modifie la probabilité de succès aux lancers suivants. Seule l'indépendance conditionnelle (sachant le niveau du joueur) est vérifiée.

6. $G = 5X - 6$ vaut -6 , -1 , 4 , 9 pour $X = 0, 1, 2, 3$.

g_i	-6	-1	4	9
$P(G = g_i)$	$0,2798$	$0,3786$	$0,2634$	$0,0782$

$$E(G) = -1,6788 - 0,3786 + 1,0536 + 0,7038 = -0,3 \text{ € (on retrouve } 5E(X) - 6 = 5 \times 1,14 - 6 \text{ par linéarité). } E(G^2) = 36 \times 0,2798 + 1 \times 0,3786 + 16 \times 0,2634 + 81 \times 0,0782 = 10,0728 + 0,3786 + 4,2144 + 6,3342 = 21, \text{ donc } V(G) = 21 - 0,3^2 = 20,91 \text{ et } \sigma(G) = \sqrt{20,91} \approx 4,57 \text{ €}.$$

Conclusion : $E(X) = 1,14$, $V(X) = 0,8364$, probabilité d'être débutant sachant zéro succès $\approx 0,732$, $E(G) = -0,30 \text{ €}$ et $\sigma(G) \approx 4,57 \text{ €}$.

D4.

1. Le premier pile au lancer k ($1 \leq k \leq 4$) a pour probabilité $(\frac{1}{2})^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$ (lancers indépendants). L'absence de pile en 4 lancers a pour probabilité $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

x_i	2	4	8	16	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{Somme : } \frac{8+4+2+1+1}{16} = 1.$$

2. $E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{1}{16} + 0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. La mise équitable est de 4 € .
3. $E(X^2) = 4 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{4} + 64 \times \frac{1}{8} + 256 \times \frac{1}{16} = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$. $V(X) = 30 - 4^2 = 14$ et $\sigma(X) = \sqrt{14} \approx 3,74$.
4. Le gain algébrique est $X - 4$. Il est strictement positif si $X \in \{8, 16\}$: probabilité $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Il est strictement négatif si $X \in \{0, 2\}$: $\frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$. Il est nul pour $X = 4$: $\frac{1}{4}$ (vérification : $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = 1$). Le jeu est équitable alors que le joueur perd plus d'une fois sur deux : de rares gros gains compensent de nombreuses petites pertes, d'où l'écart type élevé.
5. Pour N lancers, la somme 2^k est reçue avec la probabilité $\frac{1}{2^k}$ ($k = 1, \dots, N$), et 0 avec la probabilité $\frac{1}{2^N}$. Donc $E = \sum_{k=1}^N 2^k \times \frac{1}{2^k} + 0 = \sum_{k=1}^N 1 = N$.

6. def moyenne(n, N):

```
    return sum(partie(N) for _ in range(n)) / n
```

$$\text{Avec } \mu = 4, \sigma = \sqrt{14} \text{ et } n = 100 : \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{14}}{10} \approx 0,75, \text{ d'où l'intervalle } [3,25; 4,75].$$

Conclusion : $E(X) = 4$ (mise équitable 4 €), $\sigma(X) \approx 3,74$, et $E = N$ pour N lancers maximum.

D5.

1. A a besoin d'une seule victoire, B de deux. Il reste au plus 2 parties : si A gagne la prochaine partie, le jeu s'arrête (il a 3 victoires) ; sinon B a 2 victoires, A en a 2, et une dernière partie décide. Arbre pondéré : première partie, A gagne ($\frac{1}{2}$) puis fin, A reçoit 64 ; B gagne ($\frac{1}{2}$) puis seconde partie, A gagne ($\frac{1}{2}$) et reçoit 64, ou B gagne ($\frac{1}{2}$) et A reçoit 0.
2. X vaut 64 ou 0. $P(X = 64) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (chemins « A » et « B puis A ») et $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (chemin « B puis B »).

x_i	0	64
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Somme : $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

3. $E(X) = 64 \times \frac{3}{4} = 48$. La part de B est $64 - X$, d'espérance $64 - 48 = 16$. Le partage équitable est de 48 pistoles pour A et 16 pour B .
4. A a besoin d'une victoire, B de trois : il reste au plus 3 parties. B ne gagne que s'il remporte les trois parties restantes : $P(X = 0) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ et $P(X = 64) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. $E(X) = 64 \times \frac{7}{8} = 56$: partage équitable de 56 pistoles pour A et 8 pour B .
5. A gagne avec la probabilité 0,6 à chaque partie, B avec 0,4. $P(X = 64) = 0,6 + 0,4 \times 0,6 = 0,6 + 0,24 = 0,84$ (et $P(X = 0) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$). $E(X) = 64 \times 0,84 = 53,76$ pistoles.
6. a) La fonction renvoie 64 si A gagne la suite des parties, 0 sinon. On écrit :

```
def moyenne(n):
    return sum(partie() for _ in range(n)) / n
```

La moyenne d'un grand échantillon est proche de l'espérance : `moyenne(100000)` est proche de $E(X) = 48$.

- b) $E(X^2) = 64^2 \times \frac{3}{4} = 3072$, donc $V(X) = 3072 - 48^2 = 3072 - 2304 = 768$ et $\sigma(X) = \sqrt{768} = 16\sqrt{3} \approx 27,71$. Pour $n = 100$: $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 27,71}{10} \approx 5,54$, d'où l'intervalle $[48 - 5,54; 48 + 5,54] = [42,46; 53,54]$.

Conclusion : le partage équitable est 48 pistoles pour A et 16 pour B (espérance $E(X) = 48$) ; 56 et 8 si B n'a encore rien gagné ; $E(X) = 53,76$ si A gagne chaque partie avec la probabilité 0,6 ; pour $n = 100$, la moyenne simulée se trouve dans $[42,46; 53,54]$ dans environ 95 % des cas.

D6.

1. $p_0 + p_1 + p_2 = 1$; $E(X) = p_1 + 2p_2 = 1,2$; $E(X^2) = p_1 + 4p_2$ et, d'après König-Huygens, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 0,56 + 1,44 = 2$, d'où $p_1 + 4p_2 = 2$.
2. En soustrayant les deux dernières équations : $2p_2 = 0,8$, donc $p_2 = 0,4$, puis $p_1 = 1,2 - 0,8 = 0,4$ et $p_0 = 1 - 0,4 - 0,4 = 0,2$. Ces trois nombres sont positifs de somme 1 : c'est une loi. Vérification : $E = 0,4 + 0,8 = 1,2$, $E(X^2) = 0,4 + 1,6 = 2$, $V = 2 - 1,44 = 0,56$.
3. Avec deux épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques de probabilité de succès p et $q = 1 - p$, l'arbre donne $P(X = 2) = p^2$ et $P(X = 0) = q^2$. Il faudrait donc $p^2 = 0,4$, soit $p = \sqrt{0,4} \approx 0,632$ ($p > 0$), puis $P(X = 0) = (1 - \sqrt{0,4})^2 = 1,4 - 2\sqrt{0,4} \approx 0,135$. Or $P(X = 0) = 0,2$: les valeurs sont incompatibles. Ce n'est donc pas le cas.
4. Le même raisonnement avec $V(X) = 1$ donne $E(X^2) = 1 + 1,44 = 2,44$, donc $p_1 + 4p_2 = 2,44$, $2p_2 = 1,24$, $p_2 = 0,62$, $p_1 = 1,2 - 1,24 = -0,04 < 0$. Une probabilité ne peut être négative : il n'existe pas de telle variable.

Conclusion : la loi est $p_0 = 0,2$, $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,4$; ce n'est pas un nombre de succès à $n = 2$; le couple $(E, V) = (1,2; 1)$ est impossible sur $\{0, 1, 2\}$.

D7.

1. C'est un schéma de Bernoulli avec $n = 3$: $P(X = 0) = q^3$, $P(X = 1) = 3pq^2$, $P(X = 2) = 3p^2q$,

$P(X = 3) = p^3$. Le système fonctionne si $X \geq 2$: $f(p) = 3p^2q + p^3 = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 3p^3 + p^3 = 3p^2 - 2p^3$.

2. $f(p) - p = 3p^2 - 2p^3 - p = -p(2p^2 - 3p + 1) = -p(2p - 1)(p - 1) = p(1 - p)(2p - 1)$ (car $2p^2 - 3p + 1 = (2p - 1)(p - 1)$). Comme $p > 0$ et $1 - p > 0$, le signe est celui de $2p - 1$: le système est plus fiable qu'un composant seul si et seulement si $p > \frac{1}{2}$ (égalité pour $p = \frac{1}{2}$).
3. $f(0,9) = 3 \times 0,81 - 2 \times 0,729 = 2,43 - 1,458 = 0,972 > 0,9$. $f(0,4) = 3 \times 0,16 - 2 \times 0,064 = 0,48 - 0,128 = 0,352 < 0,4$. La redondance améliore la fiabilité de composants fiables ($p > \frac{1}{2}$) mais la dégrade pour des composants peu fiables.
4. Avec 4 composants, $P(\text{au moins } 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,1^4 - 4 \times 0,9 \times 0,1^3 = 1 - 0,0001 - 0,0036 = 0,9963$.
5. Pour $p = 0,9$, le système fonctionne avec la probabilité 0,972. $P(X = 2) = 3 \times 0,81 \times 0,1 = 0,243$ et $P(X = 3) = 0,729$. Sachant $\{X \geq 2\}$: $P(X = 2) = \frac{0,243}{0,972} = 0,25$ et $P(X = 3) = \frac{0,729}{0,972} = 0,75$ (somme 1). Nombre moyen : $2 \times 0,25 + 3 \times 0,75 = 0,5 + 2,25 = 2,75$.

Conclusion : $f(p) = 3p^2 - 2p^3$ dépasse p exactement pour $p > \frac{1}{2}$; $f(0,9) = 0,972$, le système à 4 composants atteint 0,9963 et, système en marche, 2,75 composants fonctionnent en moyenne.