

Variables aléatoires

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

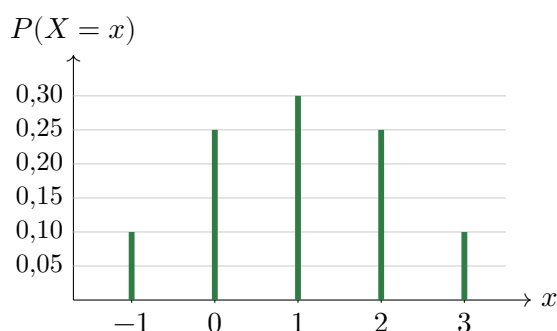
Exercice B1 : Loi d'une variable aléatoire

Une roue est partagée en 10 secteurs identiques : 4 rouges, 3 bleus, 2 verts et 1 jaune. On la fait tourner et on lit la couleur du secteur désigné par le repère. Un secteur rouge rapporte 0 point, un bleu 2 points, un vert 5 points et le jaune 10 points. On note X le nombre de points obtenus.

1. Donner les valeurs possibles de X et sa loi sous forme de tableau.
2. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer $P(X \geq 2)$, $P(X < 5)$ et $P(2 \leq X \leq 5)$.

Exercice B2 : Lecture d'un diagramme en bâtons

Le diagramme ci-dessous représente la loi d'une variable aléatoire X : la hauteur du bâton situé en x est $P(X = x)$.



1. Lire la loi de X et la présenter dans un tableau. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer $P(X \geq 1)$, $P(X < 0)$ et $P(X \leq 2)$.
3. Calculer $E(X)$. Le diagramme admet un axe de symétrie : lequel ? Que remarque-t-on ?

Exercice B3 : Une loi avec un paramètre

Soit a un réel. La variable aléatoire X a pour loi :

x_i	-2	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,1	a	0,3	$2a$

1. Déterminer a .
2. Calculer $P(X > 0)$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice B4 : Espérance, variance, écart type

Soit X la variable aléatoire de loi :

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $V(X)$ à partir de la définition $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$.
3. Calculer $E(X^2)$, puis retrouver $V(X)$ avec la formule de König-Huygens.
4. Donner $\sigma(X)$ arrondi au centième.

Exercice B5 : Un jeu équitable ?

Un joueur mise 2 €, puis lance un dé équilibré à six faces. Si le 6 sort, il reçoit 8 €. Si le 4 ou le 5 sort, il

reçoit 2 €. Sinon, il ne reçoit rien. On note G le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme reçue moins la mise.

1. Donner la loi de G .
2. Calculer $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?
3. L'organisateur porte la mise à 3 € sans changer les lots. Calculer l'espérance du nouveau gain algébrique G' , puis la perte moyenne d'un joueur qui fait 50 parties.

Exercice B6 : Linéarité de l'espérance

1. Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 5$. Calculer l'espérance de $Y = 3X - 2$, puis celle de $Z = 10 - X$.
2. La température C (en °C) d'une salle vérifie $E(C) = 20$. La température en degrés Fahrenheit est $F = 1,8C + 32$. Calculer $E(F)$.
3. Avec X comme à la question 1, déterminer le réel b tel que $E(2X + b) = 0$, puis le réel a tel que $E(aX - 3) = 7$.
4. Un vendeur de glaces reçoit chaque jour N clients, avec $E(N) = 40$. Il gagne 2,5 € par client et doit payer 30 € de frais fixes par jour. Exprimer son bénéfice journalier B en fonction de N , puis calculer $E(B)$.

Exercice B7 : Nombre de succès pour $n = 3$

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,4, les lancers étant supposés indépendants. Il effectue 3 lancers francs. On note X le nombre de lancers réussis.

1. Justifier qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli et préciser ses paramètres.
2. L'arbre de l'expérience comporte 8 chemins. Combien contiennent exactement 2 succès ? Les écrire, puis calculer $P(X = 2)$.
3. Donner la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Calculer $E(X)$. Calculer $P(X \geq 1)$.
5. Un seul lancer est une épreuve de Bernoulli. Soit Y la variable aléatoire égale à 1 si le lancer est réussi et à 0 sinon. Donner la loi de Y , puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de p et q .

Exercice B8 : Vrai ou faux ? (justifier)

1. Le tableau $x_i : 1, 2, 3$ avec $P(X = x_i) : 0,5, 0,4, 0,3$ définit une loi de probabilité.
2. Si $E(X) = 3,5$, alors X prend la valeur 3,5.
3. Pour toute variable aléatoire X , $E(X^2) = (E(X))^2$.
4. Pour toute variable aléatoire X , $E(X + 10) = E(X) + 10$.
5. Une urne contient 2 boules rouges et 3 vertes. On tire 2 boules successivement sans remise et on compte les boules rouges : on a un schéma de Bernoulli avec $n = 2$.
6. Si $E(X) = 0$, alors $V(X) = E(X^2)$.

Exercice B9 : Python : espérance, variance, simulation

On considère le programme suivant.

```
from random import random

loi = [(-1, 0.5), (2, 0.3), (5, 0.2)]

def esperance(loi):
    return sum(x * p for x, p in loi)

def variance(loi):
    m = esperance(loi)
    return sum(p * (x - m) ** 2 for x, p in loi)
```

```
def nb_succes():  
    s = 0  
    for _ in range(3):  
        if random() < 0.4:  
            s = s + 1  
    return s  
  
def moyenne(n):  
    return sum(nb_succes() for _ in range(n)) / n
```

1. Calculer à la main les valeurs exactes de `esperance(loi)` et `variance(loi)`.
2. Écrire une fonction `ecart_type(loi)` qui renvoie l'écart type.
3. Quelle variable aléatoire la fonction `nb_succes` simule-t-elle ? Vers quelle valeur `moyenne(100000)` a-t-elle de fortes chances d'être proche ? Quel principe d'estimation, vu en simulation, justifie cette attente ?