

Corrigé : Variables aléatoires**Fiche Bases**

B1. Les 10 secteurs sont équiprobables. X prend les valeurs 0, 2, 5, 10.

$$1. P(X = 0) = \frac{4}{10}, P(X = 2) = \frac{3}{10}, P(X = 5) = \frac{2}{10}, P(X = 10) = \frac{1}{10}.$$

x_i	0	2	5	10
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

$$2. 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1.$$

$$3. P(X \geq 2) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6; P(X < 5) = 0,4 + 0,3 = 0,7; P(2 \leq X \leq 5) = 0,3 + 0,2 = 0,5.$$

Conclusion : $P(X \geq 2) = 0,6$, $P(X < 5) = 0,7$, $P(2 \leq X \leq 5) = 0,5$.

B2.

$$1. \text{Lecture : } P(X = -1) = 0,10, P(X = 0) = 0,25, P(X = 1) = 0,30, P(X = 2) = 0,25, P(X = 3) = 0,10.$$

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,10	0,25	0,30	0,25	0,10

$$\text{Somme : } 0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,25 + 0,10 = 1.$$

$$2. P(X \geq 1) = 0,30 + 0,25 + 0,10 = 0,65; P(X < 0) = P(X = -1) = 0,10; P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = 0,90.$$

$$3. E(X) = -1 \times 0,10 + 0 \times 0,25 + 1 \times 0,30 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,10 = -0,1 + 0 + 0,3 + 0,5 + 0,3 = 1.$$

Le diagramme est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$; l'espérance est l'abscisse de cet axe.

Conclusion : $P(X \geq 1) = 0,65$, $P(X < 0) = 0,10$, $P(X \leq 2) = 0,90$ et $E(X) = 1$.

B3.

$$1. \text{La somme vaut 1 : } 0,1 + a + 0,3 + 2a = 1, \text{ donc } 3a = 0,6 \text{ et } a = 0,2. \text{ Les probabilités sont alors } 0,1; 0,2; 0,3; 0,4, \text{ toutes positives.}$$

$$2. P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0,3 + 0,4 = 0,7.$$

$$3. E(X) = -2 \times 0,1 + 0 \times 0,2 + 1 \times 0,3 + 3 \times 0,4 = -0,2 + 0,3 + 1,2 = 1,3.$$

Conclusion : $a = 0,2$, $P(X > 0) = 0,7$, $E(X) = 1,3$.

B4.

$$1. E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 0,4 + 0,6 + 0,8 = 1,8.$$

$$2. V(X) = 0,1 \times (0 - 1,8)^2 + 0,4 \times (1 - 1,8)^2 + 0,3 \times (2 - 1,8)^2 + 0,2 \times (4 - 1,8)^2$$

$$= 0,1 \times 3,24 + 0,4 \times 0,64 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 4,84 = 0,324 + 0,256 + 0,012 + 0,968 = 1,56.$$

$$3. E(X^2) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 16 \times 0,2 = 0,4 + 1,2 + 3,2 = 4,8. \text{ D'après König-Huygens, } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4,8 - 1,8^2 = 4,8 - 3,24 = 1,56.$$

$$4. \sigma(X) = \sqrt{1,56} \approx 1,25.$$

Conclusion : $E(X) = 1,8$, $V(X) = 1,56$, $\sigma(X) \approx 1,25$.

B5.

$$1. \text{Le joueur reçoit 8 € avec la probabilité } \frac{1}{6} \text{ (gain } 8 - 2 = 6), 2 \text{ € avec la probabilité } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (gain 0),}$$

$$\text{et rien avec la probabilité } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (gain -2).}$$

g_i	6	0	-2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{Somme : } \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

2. $E(G) = 6 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{2} = 1 + 0 - 1 = 0$. L'espérance est nulle : le jeu est équitable.
3. Le nouveau gain est $G' = G - 1$ (un euro de mise en plus), donc $E(G') = E(G) - 1 = -1$. Sur 50 parties, la perte moyenne est $50 \times 1 = 50$ €.

Conclusion : avec une mise de 2 € le jeu est équitable ; avec une mise de 3 €, le joueur perd en moyenne 1 € par partie, soit 50 € sur 50 parties.

B6.

1. Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13$. De même $E(Z) = E(-X + 10) = -E(X) + 10 = -5 + 10 = 5$.
2. $E(F) = E(1,8C + 32) = 1,8E(C) + 32 = 1,8 \times 20 + 32 = 68$.
3. $E(2X + b) = 2E(X) + b = 10 + b$, donc $E(2X + b) = 0 \iff b = -10$. Ensuite $E(aX - 3) = 5a - 3$, donc $5a - 3 = 7 \iff a = 2$.
4. Le bénéfice est $B = 2,5N - 30$. Alors $E(B) = 2,5E(N) - 30 = 2,5 \times 40 - 30 = 70$.

Conclusion : $E(Y) = 13$ et $E(Z) = 5$; $E(F) = 68$; $b = -10$ et $a = 2$; $B = 2,5N - 30$ et $E(B) = 70$ €.

B7.

1. Chaque lancer a deux issues (réussi S avec $p = 0,4$, raté avec $q = 0,6$), les lancers sont indépendants et la probabilité de réussite est la même à chaque lancer : c'est un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,4$. X est le nombre de succès.
2. Les chemins à 2 succès sont $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$ et $\bar{S}SS$: il y en a 3. Chacun a pour probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$, donc $P(X = 2) = 3 \times 0,096 = 0,288$.
3. $P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216$; $P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,432$; $P(X = 2) = 0,288$; $P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Somme : $0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$.

4. $E(X) = 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064 = 0,432 + 0,576 + 0,192 = 1,2$. Enfin $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,216 = 0,784$.
5. $P(Y = 1) = p = 0,4$ et $P(Y = 0) = q = 0,6$ (loi de Bernoulli de paramètre p). $E(Y) = 1 \times p = p$; $E(Y^2) = 1^2 \times p = p$, donc $V(Y) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$. Ici $E(Y) = 0,4$ et $V(Y) = 0,24$.

Conclusion : $E(X) = 1,2$, $P(X \geq 1) = 0,784$; pour une épreuve de Bernoulli, $E(Y) = p$ et $V(Y) = pq$.

B8.

1. **Faux.** $0,5 + 0,4 + 0,3 = 1,2 \neq 1$.
2. **Faux.** Pour un dé équilibré, $E(X) = \frac{1+2+\dots+6}{6} = 3,5$, mais 3,5 n'est pas une face. L'espérance est une moyenne, pas une valeur obligatoirement prise.
3. **Faux.** Contre-exemple : si X vaut -1 ou 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacune, alors $E(X) = 0$ donc $(E(X))^2 = 0$, alors que $E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1$. En général, $E(X^2) - (E(X))^2 = V(X) \geq 0$ (König-Huygens).
4. **Vrai.** C'est la linéarité de l'espérance : $E(X + 10) = E(X) + 10$.
5. **Faux.** Sans remise, les tirages ne sont pas indépendants : $P(R_1) = \frac{2}{5}$ mais, sachant R_1 , la probabilité d'une deuxième rouge est $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{5}$. La probabilité de succès change d'un tirage à l'autre.
6. **Vrai.** D'après König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 0 = E(X^2)$.

B9.

1. $\text{esperance}(\text{loi}) = -1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = -0,5 + 0,6 + 1 = 1,1$.
 $\text{variance}(\text{loi}) = 0,5 \times (-2,1)^2 + 0,3 \times 0,9^2 + 0,2 \times 3,9^2 = 2,205 + 0,243 + 3,042 = 5,49$.
(Vérification par König-Huygens : $E(X^2) = 0,5 + 1,2 + 5 = 6,7$ et $6,7 - 1,1^2 = 5,49$.)
2. On renvoie la racine carrée de la variance :

```
from math import sqrt
```

```
def ecart_type(loi):  
    return sqrt(variance(loi))
```

Ici `ecart_type(loi)` vaut $\sqrt{5,49} \approx 2,34$.

3. `nb_succes` simule le nombre de succès X pour 3 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,4 (exercice B7). Sa loi est celle de l'exercice B7, d'espérance $E(X) = 1,2$. La moyenne observée sur un grand échantillon simulé est proche de l'espérance : `moyenne(100000)` est proche de 1,2 (principe d'estimation de l'espérance par une moyenne d'échantillon, observé par simulation).