

Fiche 3 : espérance et résolution de problèmes

Sept exercices pour **utiliser l'espérance dans des problèmes** :

- une **loterie** et le prix d'un ticket équitable ;
- la **somme de deux dés** ;
- une **assurance** ;
- la **roulette** : deux mises, même espérance, risque différent ;
- un approfondissement facultatif : la fonction $x \mapsto E((X - x)^2)$;
- **Python** : écart type et fréquence des lettres ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable aléatoire** et ses **valeurs** sont annoncées ;
- les **formules** sont citées ;
- chaque résultat est **interprété** avec l'unité du contexte.

Le modèle de rédaction pour un problème d'espérance

« Soit X le gain algébrique en euros. X prend les valeurs 498, 48, 8 et -2 . Sa loi est donnée par le tableau. $E(X) = \sum x_i p_i = -1,05$. En moyenne, un acheteur **perd 1,05 €** par ticket. »

- **Définis** X avec son unité.
- **Écris** la loi.
- **Interprète** le résultat par une phrase.

Les pièges classiques

- Oublier de **déduire la mise** du gain.
- Calculer l'espérance sans vérifier que la **somme des probabilités vaut 1**.
- Ne pas **interpréter** le résultat.
- Écrire la variance dans la mauvaise **unité**.

Un jeu où l'on perd en moyenne 1,05 € par ticket s'appelle une loterie. Un jeu où l'on gagne en moyenne s'appelle une erreur de l'organisateur.

Exercice 1 (★★) : une loterie

Une tombola vend 1000 tickets à 2 € l'un. Il y a 1 lot de 500 €, 5 lots de 50 € et 20 lots de 10 €. On achète un ticket et on note X le **gain algébrique** (valeur du lot moins le prix du ticket).

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et interpréter.
3. À quel prix l'organisateur devrait-il vendre un ticket pour que le jeu soit équitable ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

X prend les valeurs 498, 48, 8 et -2 (ticket perdant).

Il y a $1 + 5 + 20 = 26$ tickets gagnants et 974 tickets perdants.

x_i	498	48	8	-2
$P(X = x_i)$	0,001	0,005	0,02	0,974

Vérification : $0,001 + 0,005 + 0,02 + 0,974 = 1$.

Question 2

$$E(X) = 498 \times 0,001 + 48 \times 0,005 + 8 \times 0,02 - 2 \times 0,974 = 0,498 + 0,24 + 0,16 - 1,948 = -1,05.$$

En moyenne, un acheteur perd 1,05 € par ticket.

Question 3

Les lots valent $500 + 5 \times 50 + 20 \times 10 = 950$ €, soit 0,95 € par ticket en moyenne. Pour un prix m , $E(X) = 0,95 - m$.

Le jeu est équitable pour un ticket à 0,95 €.

Exercice 2 (★★) : la somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces. L'univers Ω est formé des 36 couples $(a; b)$, équiprobables. On note S la variable aléatoire $S(a; b) = a + b$.

1. Donner la loi de S .
2. Calculer $P(S \geq 10)$.
3. Calculer $E(S)$ puis $V(S)$ avec la formule de König-Huygens.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Le nombre de couples de somme s est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 pour $s = 2, \dots, 12$ (par exemple somme 4 : (1; 3), (2; 2), (3; 1)).

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Vérification : $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{36}{36} = 1.$

Question 2

$$P(S \geq 10) = \frac{3 + 2 + 1}{36} = \frac{6}{36}.$$

$$P(S \geq 10) = \frac{1}{6}.$$

Question 3

$$E(S) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

$$E(S^2) = \frac{4 \times 1 + 9 \times 2 + 16 \times 3 + 25 \times 4 + 36 \times 5 + 49 \times 6 + 64 \times 5 + 81 \times 4 + 100 \times 3 + 121 \times 2 + 144 \times 1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

$$V(S) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6} \approx 5,83 \text{ et } \sigma(S) \approx 2,42.$$

Exercice 3 (★★) : une assurance

Un assureur propose un contrat à 60 € par an. La probabilité d'un sinistre est 0,02 et un sinistre coûte 2000 € à l'assureur. Soit B le bénéfice annuel de l'assureur sur un contrat (prime moins coût).

1. Donner la loi de B .
2. Calculer $E(B)$ et interpréter.
3. Calculer $V(B)$ et $\sigma(B)$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Sans sinistre : $B = 60$ avec la probabilité 0,98. Avec un sinistre : $B = 60 - 2000 = -1940$ avec la probabilité 0,02.

b_i	60	-1940
$P(B = b_i)$	0,98	0,02

Question 2

$$E(B) = 60 \times 0,98 - 1940 \times 0,02 = 58,8 - 38,8 = 20.$$

Sur un grand nombre de contrats, l'assureur gagne en moyenne **20 €** par contrat. Cette moyenne est un gain **par contrat** : elle ne dit pas que chaque contrat rapporte **20 €**.

Question 3

$$E(B^2) = 3600 \times 0,98 + 1940^2 \times 0,02 = 3528 + 75272 = 78800.$$

$$V(B) = 78800 - 20^2 = 78400.$$

$$\sigma(B) = \sqrt{78400} = 280 \text{ €} : \text{le bénéfice d'un contrat est très dispersé autour de } 20 \text{ €}.$$

Exercice 4 (★★) : la roulette

À la roulette française, une bille s'arrête au hasard sur l'une des **37** cases numérotées de **0** à **36** (équiprobables). Un joueur mise **1 €**.

- **Mise sur un numéro** : si ce numéro sort, le joueur récupère sa mise et gagne **35 €** de plus ; sinon il perd sa mise. Soit G_1 le gain algébrique.

- **Mise sur « pair »** (les 18 numéros pairs de **2** à **36**, le **0** n'est pas pair) : si un numéro pair sort, le joueur gagne **1 €** ; sinon il perd sa mise. Soit G_2 le gain algébrique.

1. Donner la loi de G_1 et de G_2 .
2. Calculer $E(G_1)$ et $E(G_2)$. Interpréter.
3. Calculer $V(G_1)$, $V(G_2)$ et les écarts types. Comparer.
4. Pour un jeu sur un numéro, quel gain g (au lieu de **35**) rendrait le jeu équitable ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

G_1 vaut **35** avec la probabilité $\frac{1}{37}$ et **-1** avec la probabilité $\frac{36}{37}$. G_2 vaut **1** avec la probabilité $\frac{18}{37}$ et **-1** avec la probabilité $\frac{19}{37}$ (19 cases : le **0** et les 18 impairs).

x_i	-1	35
$P(G_1 = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

x_i	-1	1
$P(G_2 = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Question 2

$$E(G_1) = 35 \times \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} \text{ et } E(G_2) = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}.$$

Dans les deux cas, le joueur perd en moyenne $\frac{1}{37} \approx 0,027$ € par partie : le jeu lui est défavorable.

Question 3

$$E(G_1^2) = 35^2 \times \frac{1}{37} + \frac{36}{37} = \frac{1261}{37} \text{ donc } V(G_1) = \frac{1261}{37} - \frac{1}{37^2} = \frac{46656}{1369} \text{ et } \sigma(G_1) = \frac{216}{37} \approx 5,84 \text{ €}.$$

$$E(G_2^2) = 1 \text{ donc } V(G_2) = 1 - \frac{1}{1369} = \frac{1368}{1369} \text{ et } \sigma(G_2) \approx 1,00 \text{ €}.$$

Les espérances sont égales mais $\sigma(G_1) \approx 5,84$ est près de six fois $\sigma(G_2) \approx 1,00$: miser sur un numéro est beaucoup plus risqué (rares gros gains, pertes fréquentes).

Question 4

Avec un gain g , $E = \frac{g}{37} - \frac{36}{37}$. Elle est nulle si $g = 36$.

Le jeu serait équitable avec un gain de 36 € (au lieu de 35 €).

Exercice 5 (★★★) : pour aller plus loin : écart quadratique moyen

Pour aller plus loin, hors programme (approfondissement facultatif du programme). Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2 et 4 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25. Pour tout réel x , on pose $f(x) = E((X - x)^2)$.

1. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
2. Montrer que $f(x) = x^2 - 4x + 6$.
3. Mettre f sous forme canonique et en déduire son minimum. Comparer avec $V(X)$.
4. Dans le cas général, montrer que $f(x) = x^2 - 2E(X)x + E(X^2)$ et que le minimum de f vaut $V(X)$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$E(X) = 0 \times 0,25 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,25 = 2.$$

$$E(X^2) = 0 + 4 \times 0,5 + 16 \times 0,25 = 6.$$

Question 2

$(X - x)^2 = X^2 - 2xX + x^2$. Par linéarité de l'espérance :

$$f(x) = E(X^2) - 2x E(X) + x^2 = 6 - 4x + x^2.$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 6.$$

Question 3

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 6 = (x - 2)^2 + 2.$$

Un carré est positif ou nul : $f(x) \geq 2$, avec égalité pour $x = 2$.

Le minimum de f vaut 2, atteint en $x = E(X) = 2$. Il est égal à $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 4 = 2$.

Question 4

Même calcul : $f(x) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2$. Avec $\mu = E(X)$, la forme canonique est $f(x) = (x - \mu)^2 - \mu^2 + E(X^2) = (x - \mu)^2 + V(X)$ d'après König-Huygens.

Donc $f(x) \geq V(X)$ avec égalité si et seulement si $x = E(X)$: l'espérance est le réel qui minimise l'écart quadratique moyen, et ce minimum est la variance.

Exercice 6 (★★) : Python

On range une loi dans une liste de couples $(x_i; p_i)$ et on écrit :

```
from math import sqrt

def esperance(lois):
    return sum(x * p for x, p in lois)

def variance(lois):
    m = esperance(lois)
    return sum(p * (x - m) ** 2 for x, p in lois)

def ecart_type(lois):
    return ...
```

1. Compléter la fonction `ecart_type`.
2. Que renvoient `esperance`, `variance` et `ecart_type` pour `lois = [(0, 1/2), (2, 1/2)]` ? Le vérifier à la main.
3. Voici une fonction qui doit renvoyer la fréquence de chaque lettre d'un texte :

```
def frequences(texte):
    comptes = {}
    total = 0
    for c in texte.lower():
        if ... :
            comptes[c] = comptes.get(c, 0) + 1
            total += 1
    return {c: n / total for c, n in comptes.items()}
```

Quelle condition faut-il écrire à la place des points de suspension ? Que renvoie `frequences("banane")` ?

4. On associe à chaque lettre de "banane" le nombre 1 si c'est une voyelle, 0 sinon. On tire une lettre au hasard et X est ce nombre. Calculer $E(X)$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

```
def ecart_type(loi):
    return sqrt(variance(loi))
```

L'écart type est la racine carrée de la variance.

Question 2

Ici $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1$, $V(X) = \frac{1}{2}(0-1)^2 + \frac{1}{2}(2-1)^2 = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

Les fonctions renvoient 1.0, 1.0 et 1.0.

Question 3

On ne doit compter que les **lettres** (pas les espaces ni la ponctuation) : la condition est `c.isalpha()`.

Dans "banane", il y a 6 lettres : **b** une fois, **a** deux fois, **n** deux fois, **e** une fois.

`frequencies("banane")` renvoie les fréquences $\frac{1}{6}$ pour **b**, $\frac{1}{3}$ pour **a**, $\frac{1}{3}$ pour **n** et $\frac{1}{6}$ pour **e** (de somme 1).

Question 4

Les voyelles sont **a** et **e** : $X = 1$ avec la probabilité $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ et $X = 0$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$: la moitié des lettres de "banane" sont des voyelles.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Un jeu dont le gain algébrique a pour espérance $-0,5$ est défavorable au joueur.
2. Si l'espérance du gain est nulle, le joueur ne perd jamais.
3. Sur un grand nombre de parties, la moyenne des gains observés est en général proche de l'espérance du gain.
4. L'écart type d'un gain en euros s'exprime en euros.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Le joueur perd en moyenne 0,50 € par partie.

Vrai.

Affirmation 2

Un jeu équitable compense gains et pertes **en moyenne** : à chaque partie, le joueur peut perdre.

Faux.

Affirmation 3

C'est l'observation faite par simulation : plus l'échantillon est grand, plus la moyenne observée est en général proche de l'espérance.

Vrai.

Affirmation 4

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ a la même unité que X (la variance est en euros au carré).

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Loterie, jeu avec mise, assurance** : loi, espérance, interprétation (exercices 1, 3 et 4).
- **Somme de deux dés** : loi, espérance, variance (exercice 2).
- **Python** : écrire `ecart_type`, calculer des fréquences (exercice 6).

L'exercice 5 est un approfondissement facultatif : il ne fait pas partie des attendus.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Un jeu à $E(G) = -0,5$ est :

- A. équitable
- B. favorable au joueur
- C. **défavorable au joueur (bonne réponse)**
- D. impossible

Justification : Le joueur perd **0,50 €** en moyenne.

2. La somme de deux dés vaut **7** avec la probabilité :

- A. $\frac{1}{36}$
- B. $\frac{1}{6}$ **(bonne réponse)**
- C. $\frac{1}{12}$
- D. $\frac{7}{36}$

Justification : **6** couples sur **36**.

3. Pour une loterie à $E(X) = -1$ (gain algébrique), l'organisateur gagne en moyenne :

- A. **-1 € par ticket**

B. 1 € par ticket (bonne réponse)

C. 0 €

D. on ne peut pas savoir

Justification : Ce que perd le joueur, l'organisateur le gagne.

4. Une partie reçoit en moyenne $E(R) = 3$ €. La mise qui rend le jeu équitable est :

A. 0 €

B. 1,5 €

C. 3 € (bonne réponse)

D. 6 €

Justification : $E(G) = E(R) - m = 0$ pour $m = E(R)$.

5. `esperance([(0, 0.5), (10, 0.5)])` renvoie :

A. 0.0

B. 5.0 (bonne réponse)

C. 10.0

D. 0.5

Justification : $0 \times 0,5 + 10 \times 0,5 = 5$.