

Fiche 2 : espérance, variance et écart type

Sept exercices pour maîtriser l'espérance, la variance et l'écart type :

- E , V et σ par la **définition** puis par **König-Huygens** ;
- une loi avec **paramètres** ;
- la **linéarité** de l'espérance (démonstration et applications) ;
- la **démonstration** de König-Huygens ;
- **comparer deux lois** de même espérance ;
- le lien **statistiques et probabilités** ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable aléatoire** est définie avant tout calcul ;
- la **formule** (espérance, König-Huygens) est citée, puis les valeurs sont substituées ;
- chaque résultat est **interprété** avec l'unité du contexte.

Le modèle de rédaction pour une espérance et une variance

« $E(X) = \sum x_i p_i = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 1,1$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3,5 - 1,21 = 2,29$, donc $\sigma(X) = \sqrt{2,29} \approx 1,51$. »

- **Cite** la formule.
- **Écris** chaque terme du calcul.
- **Termine** par $\sigma(X)$ si on le demande.

Les pièges classiques

- Oublier de **mettre au carré** dans $E(X^2)$.
- Écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)$ sans carré.
- Donner la variance à la place de l'écart type.
- Oublier le signe d'une **perte**.

La variance d'un élève qui révise la veille : très grande. L'espérance de sa note : on en reparle.

Exercice 1 (★) : espérance, variance, écart type

On reprend la variable X de l'exercice 3 de la fiche 1 : $P(X = 0) = 0,5$, $P(X = 1) = 0,3$ et $P(X = 4) = 0,2$.

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $E(X^2)$ puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens.
3. En déduire $\sigma(X)$ (valeur approchée au centième).
4. Retrouver $V(X)$ avec la définition.

Exercice 2 (★★) : loi avec paramètres

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 2) = b$ et $P(X = 3) = 0,2$. On sait que $E(X) = 1,5$.

1. Écrire deux équations vérifiées par a et b .
2. En déduire a et b .
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (valeur approchée au centième).

Exercice 3 (★★) : linéarité de l'espérance

1. Soit X une variable aléatoire de valeurs x_1, x_2, x_3 et de probabilités p_1, p_2, p_3 . Soient $a \neq 0$ et b deux réels. La variable $aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les probabilités p_i . **Démontrer** que $E(aX + b) = aE(X) + b$.
2. On lance un dé équilibré. On reçoit en euros le double du résultat D , et la partie coûte 5 €. Soit $G = 2D - 5$ le gain algébrique. Calculer $E(D)$ puis $E(G)$.
3. Pour quelle mise le jeu est-il équitable ?
4. Un temps d'attente X , en minutes, vaut 0, 5 ou 10 avec les probabilités 0,2, 0,5 et 0,3. Calculer $E(X)$ puis l'espérance $E(Y)$ de ce temps exprimé en secondes ($Y = 60X$).

Exercice 4 (★★★) : démonstration de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1, \dots, x_n$, de probabilités $p_1, \dots, p_n$ et d'espérance μ . On veut démontrer que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.

1. Développer $(x_i - \mu)^2$.
2. En déduire $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$.
3. Conclure.
4. Application : X vaut 1, 3 ou 5 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25. Calculer $V(X)$ avec la formule, puis avec la définition.

Exercice 5 (★★) : comparer deux jeux

Deux jeux proposent un gain en euros. Dans le jeu A , le gain X_A vaut 0 ou 20 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Dans le jeu B , le gain X_B vaut 5, 10 ou 15 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25.

1. Calculer $E(X_A)$ et $E(X_B)$.
2. Calculer $V(X_A)$, $V(X_B)$ puis les écarts types.
3. Quel jeu choisir pour limiter le risque ? Rédiger une phrase d'interprétation.

Exercice 6 (★★) : statistiques et probabilités

Les notes d'une classe de 20 élèves sont données par le tableau.

Note	8	10	12	14	16
Effectif	2	4	6	5	3

On tire au hasard un élève de la classe (équiprobabilité) et on note X sa note.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et comparer avec la moyenne de la série.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$. Retrouver l'écart type de la série par sa définition $\sqrt{\frac{1}{20} \sum n_i (x_i - m)^2}$.
4. Calculer la probabilité que la note soit au moins égale à 12.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. L'espérance d'une variable aléatoire est toujours une valeur que X peut prendre.
2. Si $E(X) = 0$, alors X est la variable nulle.
3. Une variance est toujours positive ou nulle, et si $V(X) = 0$ alors X ne prend qu'une seule valeur.
4. $E(3X - 1) = 3E(X) - 1$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Espérance, variance, écart type** (exercice 1).
- **Loi avec paramètres** : deux équations (exercice 2).
- **Linéarité et mise équitable** (exercice 3).
- **Démontrer König-Huygens** (exercice 4).
- **Comparer deux lois** par l'écart type (exercice 5).
- **Série statistique** et variable aléatoire (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. X vaut 0 ou 4 avec les probabilités 0,75 et 0,25. Alors $E(X) =$:
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 4
 - D. 0,25
2. La formule de König-Huygens donne $V(X) =$:
 - A. $E(X^2) - E(X)$
 - B. $E(X^2) - (E(X))^2$
 - C. $(E(X))^2 - E(X^2)$
 - D. $E(X)^2$
3. Si $E(X) = 3$, alors $E(2X + 1) =$:
 - A. 6
 - B. 7
 - C. 9
 - D. 12

4. L'écart type de X est :

- A. $V(X)^2$
- B. $\sqrt{V(X)}$
- C. $\frac{1}{V(X)}$
- D. $E(X)^2$

5. Deux jeux ont la même espérance. Le plus dispersé est celui qui a :

- A. le plus petit écart type
- B. le plus grand écart type
- C. la plus petite probabilité
- D. la plus petite valeur