

Fiche 2 : espérance, variance et écart type

Sept exercices pour maîtriser l'espérance, la variance et l'écart type :

- E , V et σ par la **définition** puis par **König-Huygens** ;
- une loi avec **paramètres** ;
- la **linéarité** de l'espérance (démonstration et applications) ;
- la **démonstration** de König-Huygens ;
- **comparer deux lois** de même espérance ;
- le lien **statistiques et probabilités** ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable aléatoire** est définie avant tout calcul ;
- la **formule** (espérance, König-Huygens) est citée, puis les valeurs sont substituées ;
- chaque résultat est **interprété** avec l'unité du contexte.

Le modèle de rédaction pour une espérance et une variance

« $E(X) = \sum x_i p_i = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 1,1$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3,5 - 1,21 = 2,29$, donc $\sigma(X) = \sqrt{2,29} \approx 1,51$. »

- **Cite** la formule.
- **Écris** chaque terme du calcul.
- **Termine** par $\sigma(X)$ si on le demande.

Les pièges classiques

- Oublier de **mettre au carré** dans $E(X^2)$.
- Écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)$ sans carré.
- Donner la variance à la place de l'écart type.
- Oublier le signe d'une **perte**.

La variance d'un élève qui révise la veille : très grande. L'espérance de sa note : on en reparle.

Exercice 1 (★) : espérance, variance, écart type

On reprend la variable X de l'exercice 3 de la fiche 1 : $P(X = 0) = 0,5$, $P(X = 1) = 0,3$ et $P(X = 4) = 0,2$.

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $E(X^2)$ puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens.
3. En déduire $\sigma(X)$ (valeur approchée au centième).
4. Retrouver $V(X)$ avec la définition.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 0,3 + 0,8 = 1,1.$$

$$E(X) = 1,1.$$

Question 2

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,5 + 1^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 = 0,3 + 3,2 = 3,5.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3,5 - 1,1^2 = 3,5 - 1,21 = 2,29.$$

$$V(X) = 2,29.$$

Question 3

$$\sigma(X) = \sqrt{2,29} \approx 1,51.$$

Question 4

$$V(X) = 0,5(0 - 1,1)^2 + 0,3(1 - 1,1)^2 + 0,2(4 - 1,1)^2 = 0,605 + 0,003 + 1,682 = 2,29.$$

Les deux méthodes donnent $V(X) = 2,29$.

Exercice 2 (★★) : loi avec paramètres

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 2) = b$ et $P(X = 3) = 0,2$. On sait que $E(X) = 1,5$.

1. Écrire deux équations vérifiées par a et b .
2. En déduire a et b .
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (valeur approchée au centième).

Correction de l'exercice 2

Question 1

La somme des probabilités vaut 1 : $0,2 + a + b + 0,2 = 1$, soit $a + b = 0,6$.

L'espérance vaut 1,5 : $0 \times 0,2 + a + 2b + 3 \times 0,2 = 1,5$, soit $a + 2b = 0,9$.

Question 2

On soustrait : $(a + 2b) - (a + b) = 0,9 - 0,6$, donc $b = 0,3$ puis $a = 0,3$.

$a = 0,3$ et $b = 0,3$.

Vérification : $0,2 + 0,3 + 0,3 + 0,2 = 1$.

Question 3

$E(X^2) = 0,3 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 = 0,3 + 1,2 + 1,8 = 3,3$.

$V(X) = 3,3 - 1,5^2 = 3,3 - 2,25 = 1,05$.

$V(X) = 1,05$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,05} \approx 1,02$.

Exercice 3 (★★) : linéarité de l'espérance

1. Soit X une variable aléatoire de valeurs x_1, x_2, x_3 et de probabilités p_1, p_2, p_3 . Soient $a \neq 0$ et b deux réels. La variable $aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les probabilités p_i . **Démontrer** que $E(aX + b) = aE(X) + b$.
2. On lance un dé équilibré. On reçoit en euros le double du résultat D , et la partie coûte 5 €. Soit $G = 2D - 5$ le gain algébrique. Calculer $E(D)$ puis $E(G)$.
3. Pour quelle mise le jeu est-il équitable ?
4. Un temps d'attente X , en minutes, vaut 0, 5 ou 10 avec les probabilités 0,2, 0,5 et 0,3. Calculer $E(X)$ puis l'espérance $E(Y)$ de ce temps exprimé en secondes ($Y = 60X$).

Correction de l'exercice 3

Question 1

Par définition de l'espérance appliquée à $aX + b$:

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^3 (ax_i + b)p_i = a \sum_{i=1}^3 x_i p_i + b \sum_{i=1}^3 p_i$$

Or $\sum x_i p_i = E(X)$ et $\sum p_i = 1$.

Donc $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Question 2

$$E(D) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 2E(D) - 5 = 2 \times 3,5 - 5 = 2$.

$E(G) = 2$: le jeu est favorable au joueur, qui gagne 2 € en moyenne par partie.

Question 3

Avec une mise m , $E(2D - m) = 7 - m$. Le jeu est équitable lorsque $7 - m = 0$.

La mise équitable est $m = 7$ €.

Question 4

$$E(X) = 0 \times 0,2 + 5 \times 0,5 + 10 \times 0,3 = 2,5 + 3 = 5,5.$$

$$E(Y) = E(60X) = 60 E(X) = 60 \times 5,5 = 330.$$

En moyenne, l'attente est de 5,5 minutes, soit 330 secondes.

Exercice 4 (★★★) : démonstration de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1, \dots, x_n$, de probabilités $p_1, \dots, p_n$ et d'espérance μ . On veut démontrer que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.

1. Développer $(x_i - \mu)^2$.
2. En déduire $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$.
3. Conclure.
4. Application : X vaut 1, 3 ou 5 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25. Calculer $V(X)$ avec la formule, puis avec la définition.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2.$$

Question 2

Par définition $V(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_i p_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)$. On distribue p_i puis on sépare la somme en trois :

$$V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i.$$

Question 3

On a $\sum p_i x_i^2 = E(X^2)$, $\sum p_i x_i = \mu$ et $\sum p_i = 1$.

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Question 4

$$\mu = 0,25 + 1,5 + 1,25 = 3 \text{ et } E(X^2) = 0,25 + 4,5 + 6,25 = 11.$$

$$\text{Avec la formule : } V(X) = 11 - 3^2 = 2.$$

$$\text{Avec la définition : } 0,25(1-3)^2 + 0,5(3-3)^2 + 0,25(5-3)^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Les deux méthodes donnent $V(X) = 2$.

Exercice 5 (★★) : comparer deux jeux

Deux jeux proposent un gain en euros. Dans le jeu A , le gain X_A vaut 0 ou 20 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Dans le jeu B , le gain X_B vaut 5, 10 ou 15 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25.

1. Calculer $E(X_A)$ et $E(X_B)$.
2. Calculer $V(X_A)$, $V(X_B)$ puis les écarts types.
3. Quel jeu choisir pour limiter le risque ? Rédiger une phrase d'interprétation.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$E(X_A) = 0 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{2} = 10. \quad E(X_B) = 5 \times 0,25 + 10 \times 0,5 + 15 \times 0,25 = 1,25 + 5 + 3,75 = 10.$$

Les deux jeux ont la même espérance : 10 €.

Question 2

$$V(X_A) = \frac{1}{2}(0-10)^2 + \frac{1}{2}(20-10)^2 = 100 \text{ donc } \sigma(X_A) = 10 \text{ €}.$$

$$V(X_B) = 0,25(5-10)^2 + 0,5(10-10)^2 + 0,25(15-10)^2 = 6,25 + 0 + 6,25 = 12,5 \text{ donc } \sigma(X_B) = \sqrt{12,5} \approx 3,54 \text{ €}.$$

Question 3

Les gains moyens sont égaux mais $\sigma(X_B) < \sigma(X_A)$: les gains du jeu B sont moins dispersés autour de 10 €. Pour limiter le risque, on choisit le jeu B .

Exercice 6 (★★) : statistiques et probabilités

Les notes d'une classe de 20 élèves sont données par le tableau.

Note	8	10	12	14	16
Effectif	2	4	6	5	3

On tire au hasard un élève de la classe (équiprobabilité) et on note X sa note.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et comparer avec la moyenne de la série.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$. Retrouver l'écart type de la série par sa définition $\sqrt{\frac{1}{20} \sum n_i (x_i - m)^2}$.
4. Calculer la probabilité que la note soit au moins égale à 12.

Correction de l'exercice 6

Question 1

Il y a 20 élèves équiprobables.

x_i	8	10	12	14	16
$P(X = x_i)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15

Vérification : $0,10 + 0,20 + 0,30 + 0,25 + 0,15 = 1$.

Question 2

$$E(X) = 8 \times 0,1 + 10 \times 0,2 + 12 \times 0,3 + 14 \times 0,25 + 16 \times 0,15 = 0,8 + 2 + 3,6 + 3,5 + 2,4 = 12,3.$$

La moyenne de la série est $\frac{2 \times 8 + 4 \times 10 + 6 \times 12 + 5 \times 14 + 3 \times 16}{20} = \frac{246}{20} = 12,3$.

$E(X)$ est égale à la moyenne de la série : 12,3.

Question 3

$$E(X^2) = 64 \times 0,1 + 100 \times 0,2 + 144 \times 0,3 + 196 \times 0,25 + 256 \times 0,15 = 6,4 + 20 + 43,2 + 49 + 38,4 = 157.$$

$$V(X) = 157 - 12,3^2 = 157 - 151,29 = 5,71.$$

Par la définition de la série : $\frac{2 \times 4,3^2 + 4 \times 2,3^2 + 6 \times 0,3^2 + 5 \times 1,7^2 + 3 \times 3,7^2}{20} = \frac{114,2}{20} = 5,71$.

$V(X) = 5,71$ et $\sigma(X) = \sqrt{5,71} \approx 2,39$: c'est l'écart type de la série.

Question 4

$$P(X \geq 12) = 0,3 + 0,25 + 0,15 = 0,7 \text{ (soit 14 élèves sur 20).}$$

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. L'espérance d'une variable aléatoire est toujours une valeur que X peut prendre.
2. Si $E(X) = 0$, alors X est la variable nulle.
3. Une variance est toujours positive ou nulle, et si $V(X) = 0$ alors X ne prend qu'une seule valeur.
4. $E(3X - 1) = 3E(X) - 1$.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Pour un dé, $E(X) = 3,5$ n'est pas une valeur possible.

Faux.

Affirmation 2

Contre-exemple : X vaut -1 ou 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Alors $E(X) = 0$ mais X n'est jamais nulle.

Faux.

Affirmation 3

$V(X) = \sum p_i (x_i - \mu)^2$ est une somme de termes positifs ou nuls. Si elle vaut 0 , chaque terme est nul : pour chaque valeur possible ($p_i > 0$), $x_i = \mu$. Donc X n'a qu'une seule valeur.

Vrai.

Affirmation 4

C'est la linéarité de l'espérance avec $a = 3$ et $b = -1$.

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Espérance, variance, écart type** (exercice 1).
- **Loi avec paramètres** : deux équations (exercice 2).
- **Linéarité et mise équitable** (exercice 3).
- **Démontrer König-Huygens** (exercice 4).
- **Comparer deux lois** par l'écart type (exercice 5).
- **Série statistique** et variable aléatoire (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. X vaut 0 ou 4 avec les probabilités 0,75 et 0,25. Alors $E(X) =$:

- A. 1 (**bonne réponse**)
- B. 2
- C. 4
- D. 0,25

Justification : $0 \times 0,75 + 4 \times 0,25 = 1$.

2. La formule de König-Huygens donne $V(X) =$:

- A. $E(X^2) - E(X)$
- B. $E(X^2) - (E(X))^2$ (**bonne réponse**)
- C. $(E(X))^2 - E(X^2)$
- D. $E(X)^2$

Justification : C'est la formule de König-Huygens.

3. Si $E(X) = 3$, alors $E(2X + 1) =$:

- A. 6
- B. 7 (**bonne réponse**)
- C. 9
- D. 12

Justification : $2 \times 3 + 1 = 7$.

4. L'écart type de X est :

- A. $V(X)^2$
- B. $\sqrt{V(X)}$ (**bonne réponse**)
- C. $\frac{1}{V(X)}$
- D. $E(X)^2$

Justification : C'est la racine carrée de la variance.

5. Deux jeux ont la même espérance. Le plus dispersé est celui qui a :

- A. le plus petit écart type
- B. le plus grand écart type (bonne réponse)**
- C. la plus petite probabilité
- D. la plus petite valeur

Justification : L'écart type mesure la dispersion.